Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik

Quade, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 13, 1961, S.24-65

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik

Von Wilhelm Quade

(Eingereicht am 14. 6. 1961)

Summary: Describing the algebraic structure of calculus of physical quantities the concepts vector space and group are found to be fundamental. The division of quantities is defined by embedding a commutative semi-group in an abelian group. One important group homomorph to the afore-mentioned is a certain infinite free abelian group, the properties of which are described by its additive notation. Investigation of functions of "dimensionless quantities" leads to a new proof of the Π-Theorem of dimensional analysis.

Übersicht: Bei der Beschreibung der algebraischen Struktur des Größenkalküls der Physik erweisen sich die Begriffe des Vektorraumes und der Gruppe als fundamental. Die Division von Größen wird durch Einbettung einer kommutativen Semigruppe in eine Abelsche Gruppe definiert. Von den zu dieser Abelschen Gruppe homomorphen Gruppen ist von besonderer Bedeutung eine gewisse unendliche freie Abelsche Gruppe, deren Eigenschaften anhand der additiven Darstellung dieser Gruppe beschrieben werden. Die Untersuchung der Funktionen von „dimensionslosen Größen" führt auf einen neuen Beweis für das Π-Theorem der Dimensionstheorie.

Einleitung

In der Physik, hauptsächlich der messenden und rechnenden, wird mit einem Begriff operiert, der „physikalische Größe" genannt wird und meist in Verbindung mit dem Begriff der „Größengleichung" auftritt. Beide Begriffe werden in dem bekannten Kalkül benutzt, der von den physikalischen Maßsystemen handelt und auf den sich die Dimensionstheorie stützt. Über diesen Gegenstand gibt es eine umfangreiche Literatur; es seien hier nur die Darstellungen von *G. Birkhoff* [1], *P. W. Bridgeman* [2], *M. Landolt* [3], *G. Oberdorfer* [4], *U. Stille* [5] und *J. Wallot* [6] genannt, in denen ausführlichere Literaturangaben zu finden sind.

Von grundsätzlicher Bedeutung für diesen „Größenkalkül" ist die Frage, welches die für ihn gültigen „Rechengesetze" sind. Eine Axiomatik für das Rechnen und Messen in der Geometrie gibt schon *O. Hölder* [7] in seiner Abhandlung „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß". Die folgenden Betrachtungen gehen in einer etwas anderen Richtung; sie zielen darauf ab, die *algebraische Struktur* dieses Kalküls zu beschreiben. Daß die algebraische Methode die der Natur des Gegenstandes angemessene ist, geht auch daraus hervor, daß in verschiedenen neueren Veröffentlichungen von ihr in größerem Umfang Gebrauch gemacht wird (vgl. z. B. *M. Landolt* [3], *S. Drobot* [8] und *R. Fleischmann* [9, 10, 11]). Da der Sprachgebrauch der Algebra von dem der Physik abweicht, sind im folgenden der leichteren Verständlichkeit halber neben den in der Algebra gebräuchlichen Benennungen die entsprechenden der Physik angemerkt. Auch die unten benutzten Bezeichnungen unterscheiden sich von denen der Physik; sie wurden ausschließlich mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Struktur ausgewählt.

Zwei algebraische Strukturen sind es, die für diesen Kalkül von Bedeutung sind, der Begriff des *Vektorraumes* und der der *Gruppe*. Beide werden schon seit jeher benutzt, manchmal ohne daß sie genannt werden. So hat man sich schon seit langem für eine „invariante Schreibweise" der „Größengleichungen" eingesetzt (vgl. z. B. *J. Wallot* [6]), eine Forderung, hinter der der Begriff des Vektorraumes steht. Wegen der Bedeutung des Begriffes der Gruppe sei auf *M. Landolt* [3] und die *Fleischmann*schen Arbeiten [9, 10, 11] verwiesen. Die folgenden Betrachtungen berühren sich naturgemäß in verschiedenen Punkten mit denen anderer Darstellungen, unterscheiden sich aber dadurch, daß sie in der Hauptsache darauf ausgehen, den Kalkül zu analysieren und axiomatisch aufzubauen. Wegen der hier benutzten Begriffe und Sätze der Algebra sei auf die folgenden Werke verwiesen: *N. Bourbaki* [12], *E. Chatelet* [13], *P. Dubreil* [14], *E. Sperner* [15], *B. L. van der Waerden* [16]. Um dem mit der Algebra weniger vertrauten, aber an dem Thema interessierten Leser das Eindringen in den Gegenstand zu erleichtern, wurde die Darstellung an verschiedenen Stellen ausführlicher gehalten, als es für das algebraische Thema an sich erforderlich gewesen wäre.

Die Anwendung des Kalküls wird nur an einigen elementaren Beispielen aus der Geometrie und der Mechanik demonstriert. Auf eine Erörterung der Frage, wie der Kalkül auf den Bereich der gesamten Physik anzuwenden sei, wird hier verzichtet, da die Auffassungen hierüber auseinandergehen, hauptsächlich infolge der unterschiedlichen Interpretation der physikalischen Gleichungen.

Da es keine allgemein anerkannte Definition des Begriffes „physikalische Größe" gibt, soll, um jedes Mißverständnis zu vermeiden, im folgenden von der Benutzung des Namens „physikalische Größe" abgesehen werden. Dafür wird unter dem Namen „V-Element" ein neuer Begriff eingeführt; dieser Name wurde gewählt, um darauf hinzuweisen, daß es sich hierbei um Elemente von (abstrakten) Vektorräumen handelt. Der neue Begriff wird, wie in der Axiomatik üblich, implizite definiert, indem die Eigenschaften der algebraischen Struktur des Kalküls aufgezählt werden. V-Element kann demnach jedes Ding genannt werden, welches die unten geforderten Eigenschaften besitzt. Wer keine Bedenken hat, kann also unter einem V-Element eine physikalische Größe verstehen.

Durch die Beschreibung der algebraischen Struktur des Kalküls werden die Grenzen erkennbar, die dem Kalkül als solchem gesetzt sind. Der Kalkül ist einer Rechenmaschine vergleichbar, welche die ihr mitgeteilten Daten in der durch ihre Struktur bedingten Weise verarbeitet und dabei Eigenschaften, für die sie kein „Organ" besitzt, ignoriert. Wenn dieses oder jenes Ergebnis des Kalküls auf den ersten Blick befremdlich erscheint, so liegt dies daran, daß diese Rechenmaschine außerstande ist, kalkülfremde Merkmale zu berücksichtigen. Hierher gehört auch, daß der Kalkül keinen Unterschied zwischen Tensoren verschiedener Stufe kennt.

Den Kollegen *R. Fleischmann, A. Hochrainer* und *U. Stille* danke ich für manche die Arbeit fördernde Unterhaltung, meinen Mitarbeitern *H. Brass*

und *St. Schottlaender* für wertvolle kritische Anregungen bei der Ausarbeitung des Manuskriptes.

§ 1. Vektorräume von V-Elementen

Es sei Ω der Körper (die Menge) der reellen oder der komplexen Zahlen. Die Elemente von Ω seien mit

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

bezeichnet.

Ferner sei A eine unendliche Menge, die „A-Raum" genannt werden soll. Ihre Elemente sollen „V-*Elemente* des A-Raumes" heißen und mit

$$a, a_1, a_2, \ldots$$

bezeichnet werden.

Die Mengen A und Ω seien elementfremd.

Die letzte Forderung besagt, daß es kein Element des A-Raumes geben soll, welches eine Zahl ist, daß also beispielsweise das V-Element „3 Meter" und die Zahl 3 als voneinander verschieden angesehen werden sollen. Über die Möglichkeit, gewisse V-Elemente mit Zahlen zu „identifizieren", wird in § 7 Näheres ausgeführt.

Die Menge A habe die folgenden Eigenschaften:

1. Zwischen den Elementen von A ist eine Verknüpfungsoperation erklärt, genannt *Addition*, welche je zwei Elementen a_1 und a_2 aus A genau ein Element a_3 aus A zuordnet:

$$a_1 + a_2 = a_3 .$$

a_3 wird die „Summe" aus a_1 und a_2 genannt. Da die Verknüpfung zweier Elemente von A wieder ein Element von A ergibt, sagt man, es liege „ interne Komposition" der Elemente von A vor.

Diese Verknüpfung besitze die folgenden Eigenschaften:

1.1 $a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3$ (assoziatives Gesetz)

1.2. $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$, (kommutatives Gesetz)

1.3. Es gibt genau ein „neutrales Element", mit o bezeichnet, so daß für jedes Element $a \in A$

$$a + o = a.$$

1.4. Zu jedem Element $a \in A$ gibt es genau ein „inverses Element", mit $-a$ bezeichnet, so daß

$$a + (-a) = o .$$

Wenn die Elemente einer Menge die unter 1. aufgeführten Eigenschaften besitzen, so sagt man, daß sie einen „Modul" bilden (auch „additive Abelsche Gruppe"). Aus den Eigenschaften 1. folgt, daß die Subtraktion von zwei Elementen a_1 und a_2 aus A uneingeschränkt und eindeutig ausführbar ist. $a_2 - a_1$ ist das Element a_3, für welches $a_1 + a_3 = a_2$ ist, also das Element

$$a_3 = a_2 + (-a_1).$$

2. Zwischen den Elementen von Ω, also den Zahlen, und den Elementen von A sei eine multiplikative Verknüpfung erklärt, welche jedem $\alpha \in \Omega$ und jedem $a \in A$ genau ein Element $a_1 \in A$ zuordnet,

$$a_1 = \alpha\, a = a\, \alpha.$$

Man spricht hier von „externer Komposition“, da die Verknüpfung eines Elementes von A mit einem Element von Ω, das also nicht zu A gehört, ein Element von A ergibt.

Diese Verknüpfung besitze die folgenden Eigenschaften:

2.1.	$\alpha\,(\beta a) = (\alpha\beta)\, a$	(assoziatives Gesetz)
2.2.	$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a$	(distributives Gesetz bezüglich der Addition von Elementen aus Ω)
2.3.	$\alpha\,(a_1 + a_2) = \alpha a_1 + \alpha a_2$	(distributives Gesetz bezüglich der Addition von Elementen aus A)
2.4.	$1 \cdot a = a$	(unitärer Modul).

Wenn die Elemente einer Menge die unter 1. und 2. aufgeführten Eigenschaften besitzen, so sagt man, daß sie einen „*Vektorraum über dem Körper Ω*“ bilden.

Unter dem Namen „Vektorraum“ wird, wie in der Algebra allgemein üblich, hier eine spezielle algebraische Struktur verstanden, die zu den „Gruppen mit Operatoren“ (groupes à opérateurs) gehört. Die Elemente von Ω, also die Zahlen, werden dabei „Operatoren“ genannt; die Gruppe, um welche es sich hier handelt, ist der unter 1. definierte Modul. Wegen näherer Einzelheiten über solche Gruppen sei auf *N. Bourbaki* [17] verwiesen. Der Name Vektorraum rührt davon her, daß die Gesetze dieser algebraischen Struktur dieselben sind wie die für das Rechnen mit den bekannten Vektoren des zwei- oder dreidimensionalen Raumes. In Zusammenhang mit dem Größenkalkül werden die Gruppen mit Operatoren wohl erstmals bei *M. Landolt* [18] erwähnt, aber nicht benutzt.

Eine wichtige Eigenschaft des Vektorraumes ist die folgende:

Ist $\alpha a = o$, so ist $\alpha = 0$ oder $a = o$ oder $\alpha = 0$ und $a = o$.

In der Tat, ist $\alpha \neq 0$, so ist $\beta = 1/\alpha \neq 0$. Wird $\alpha a = o$ mit β multipliziert, so folgt

$\beta\,(\alpha a) = a = \beta o = \beta\,(a - a) = \beta a - \beta a$, d. h. $a = o$.

Ist $a \neq o$, so ist $\alpha = 0$. Wäre nämlich $\alpha \neq 0$, so wäre nach dem soeben Gezeigten $a = o$, was der Voraussetzung $a \neq o$ widerspricht.

Schließlich sei noch gefordert, daß die Elemente von A die folgenden Eigenschaften haben:

3. *Es gibt in A mindestens ein von o verschiedenes Element a_0 und zu jedem Element a von A genau eine Zahl α, so daß*

$$a = \alpha\, a_0.$$

Besitzen die Elemente von A außer den Eigenschaften 1. und 2. auch noch die Eigenschaft 3., dann sagt man, daß die Elemente von A einen „*eindimensionalen*“ *Vektorraum über dem Körper Ω* bilden.

Das Element a_0, das bei den Betrachtungen meist festgehalten wird, heißt „Basis des eindimensionalen Vektorraumes A“ (in der Physik: Einheit der Größen aus A). Die nach Wahl von a_0 dem Element $a \in A$ zugeordnete Zahl $\alpha \in \Omega$ heißt „Koordinate“ von a bezüglich der Basis a_0 (in der Physik: Maßzahl der Größe a bezüglich der Einheit a_0). Es ist $\alpha = 0$ genau dann, wenn $a = o$ ist.

Aus den unter 1. bis 3. beschriebenen Eigenschaften des eindimensionalen Vektorraumes A folgt der

Satz 1. Jedes Element a des eindimensionalen Vektorraumes A, das vom Nullelement o von A verschieden ist, kann Basis des Vektorraumes A sein.

In der Tat, ist $a_0 \neq o$ irgendeine Basis von A, so kann nach 3. jedes Element $a \in A$ durch $a = \alpha a_0$ dargestellt werden ($\alpha \in \Omega$). Ist jetzt a_0' irgendein von o und a_0 verschiedenes Element von A, so kann dieses dargestellt werden durch

$$a_0' = \beta a_0, \qquad \beta \neq 0,\ \beta \neq 1\,.$$

Da aus der letzten Gleichung $a_0 = (1/\beta)\, a_0'$ folgt, kann jedes Element $a \in A$ durch

$$a = (\alpha/\beta)\, a_0' = \alpha'\, a_0'$$

dargestellt werden, w.z.b.w.

Der Vollständigkeit halber mögen noch die Formeln mitgeteilt werden, welche die *Umrechnung der Koordinaten bei einem Wechsel der Basis* eines Vektorraumes beschreiben. Wird ein V-Element $a \in A$ mit Hilfe zweier verschiedener Basen a_0 und a_0' dargestellt,

$$a = \alpha a_0, \quad (1.1) \qquad\qquad a = \alpha' a_0', \quad (1.1')$$

so sind ein und demselben Element $a \in A$ zwei im allgemeinen verschiedene Koordinaten α und α' zugeordnet.

Ist $a_0' = \beta a_0$ ($\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$), so sind die beiden Koordinaten durch eine der beiden aus (1.1) und (1.1′) folgenden Beziehungen

$$\alpha = \alpha'\beta \quad (1.2) \qquad\qquad \alpha' = \alpha/\beta \quad (1.2')$$

verknüpft. Die Formeln (1.2) und (1.2′) dienen zur Umrechnung der Koordinaten bei einem Wechsel der Basis. Die Elemente selbst sind von der Wahl der Basis unabhängig, oder, anders ausgedrückt, sie sind gegenüber einem Wechsel der Basis „invariant“. Über diese Eigenschaft der V-Elemente (in der Physik Größen genannt) gibt es eine umfangreiche physikalische Literatur (vgl. z. B. *J. Wallot* [6]).

Außer den Elementen des A-Raumes werden im folgenden noch Elemente anderer eindimensionaler Vektorräume betrachtet, etwa die Elemente eines B-Raumes, eines C-Raumes usw. Die Menge dieser Räume besitze die folgende Eigenschaft:

Es gibt abzählbar unendlich viele eindimensionale paarweise disjunkte Vektorräume.

Die Vereinigungsmenge der Elemente dieser Vektorräume werde die Menge der V-*Elemente, kurz „*V-*Menge“ genannt.*

Ob irgend zwei Elemente der V-Menge ein und demselben Vektorraum angehören, kann mit Hilfe des folgenden Satzes entschieden werden.

Satz 2. Zwei V-*Elemente x und y gehören genau dann zu ein und demselben eindimensionalen Vektorraum, wenn es ein Zahlenpaar* $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ *gibt, so daß*

$$(R_1) \qquad \alpha\, x = \beta\, y.$$

Beweis: Die Bedingung ist *notwendig*. Ist $x = y$, dann kann $\alpha = \beta = 1$ gesetzt werden. Ist $x \neq y$, dann ist eines der beiden Elemente, die beide dem Vektorraum X angehören mögen, vom Nullelement dieses Vektorraumes verschieden. Ist etwa x dieses Element, so kann es wegen Satz 1 als Basis von X genommen werden, und wegen $y \in X$ und der Eigenschaft 3. ist dann $y = \alpha x$, also $(\alpha, \beta) = (\alpha, 1) \neq (0,0)$.

Die Bedingung ist *hinreichend*. Es sei etwa $\beta \neq 0$. Aus (R_1) folgt dann $y = (\alpha/\beta)\, x$. Ist x Element eines Vektorraumes X, so ergibt sich aus der letzten Gleichung, daß auch $y \in X$ ist. Dies gilt unabhängig davon, ob x mit dem Nullelement von X zusammenfällt oder nicht.

In der Physik werden Größen, die demselben Vektorraum angehören, als „gleichartig“ bezeichnet.

Die Beziehung (R_1) kann als „Äquivalenzrelation“ aufgefaßt werden, da sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür gibt, wann zwei V-Elemente ein- und demselben Vektorraum angehören. Gehören zwei V-Elemente x und y demselben Vektorraum an, dann schreibt man

$$x \equiv y \pmod{R_1}$$

(gelesen: x ist äquivalent y modulo R_1). Diese Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv,

reflexiv: $x \equiv x \pmod{R_1}$,
symmetrisch: wenn $x \equiv y \pmod{R_1}$, dann $y \equiv x \pmod{R_1}$,
transitiv: wenn $x \equiv y \pmod{R_1}$ und $y \equiv z \pmod{R_1}$, dann $x \equiv z \pmod{R_1}$.

Aus dem Vorangehenden folgt der

Satz 3. Zwei V-*Elemente sind genau dann einander gleich, wenn sie demselben Vektorraum angehören und in bezug auf eine beliebig gewählte Basis desselben dieselbe Koordinate haben.*

Die im Kalkül auftretenden Gleichungen sind somit so beschaffen, daß sie die Gleicheit zweier Elemente ein und desselben Vektorraumes fordern.

§ 2. Punkt- und Vektorraum

In der physikalischen Literatur begegnet man gelegentlich „Gleichungen“, in denen keine V-Elemente vorkommen. Es handelt sich hierbei meist um Beziehungen zwischen Elementen eines „Punktraumes“, aber nicht um solche zwischen V-Elementen.

Bei den Gleichungen, die in den Axiomen des Vektorraumes auftreten, ist zu beachten, daß die Elemente des Vektorraumes sogenannte „freie Vektoren" sind (im Gegensatz zu den „gebundenen Vektoren"). Dabei wird unter einem freien Vektor eine Klasse von gerichteten Strecken (Punktdifferenzen) verstanden, bei der jedes Element der Klasse durch *Translation* aus einem gegebenen Element der Klasse entsteht. Zwei gerichtete Strecken (Punktdifferenzen), welche derselben Klasse angehören, sich also durch eine Translation zur Deckung bringen lassen, werden *äquivalent* genannt (es handelt sich hier um eine andere Art von Äquivalenz als die in § 1 besprochene). In der Regel begnügt man sich damit, eine Klasse dadurch zu charakterisieren, daß man irgendein Element von ihr angibt (die übrigen Elemente der Klasse gehen durch eine Translation aus dem gegebenen Element hervor). Die Gesamtheit aller gerichteten Strecken (Punktdifferenzen) wird durch die Äquivalenzrelation, d. i. hier die Translationsvorschrift, in *disjunkte Klassen* eingeteilt (vgl. hierzu *Queysanne-Delachet* [19]). Schließlich sei noch bemerkt, daß die Translationen einen Modul bilden, dessen neutrales Element die Verschiebung Null ist. Wegen weiterer Einzelheiten über den Zusammenhang zwischen Punkt- und Vektorraum sei beispielweise auf *E. Sperner* [20] sowie *A. Duschek* und *A. Hochrainer* [21] verwiesen.

Als Beispiel aus der Physik werde die bekannte „Gleichung"

$$273{,}16\ {}^\circ\mathrm{K} = 0\ {}^\circ\mathrm{C} \tag{2.1}$$

(°K = Grad Kelvin, °C = Grad Celsius) betrachtet. Sie ist keine Gleichung im Sinne des Kalküls, da sie eine Beziehung zwischen *Punkten* darstellt, aber nicht zwischen V-Elementen. Würde sie nämlich eine Gleichung zwischen V-Elementen darstellen, so könnte man beide Seiten der Gleichung mit ein und derselben von Null verschiedenen Zahl — beispielsweise der Zahl 2 —, also einem Element von Ω multiplizieren, ohne daß sie aufhören würde, richtig zu sein. Dann müßte nämlich 546,32 °K = 0 °C sein, was mit der Ausgangsgleichung im Widerspruch steht. Welches ist die Ursache dieses falschen Ergebnisses? Die Ursache ist die irreführende Annahme, daß 273,16 °K und 0 °C V-Elemente seien. Sie sind aber „Punkte" auf der Temperaturskala, und es ist, wie das Beispiel zeigt, nicht sinnvoll, eine multiplikative Verknüpfung von „Punkten" mit Elementen von Ω zu betrachten. Als Elemente des Vektorraumes „Temperatur" kommen nur „*Temperaturdifferenzen*" in Betracht, die in der Einheit grd (Grad) oder in einem Vielfachen dieser Einheit zu messen sind.

Die „Gleichung" (2.1) gehört auch aus dem folgenden Grunde nicht in den Kalkül. Weder °K noch °C sind Basen des Vektorraumes Temperatur, denn von zwei Basen eines Vektorraumes geht die eine aus der anderen durch Multiplikation mit einer Zahl hervor. Nun ist aber grd eine Basis des Vektorraumes Temperatur, jede andere Basis muß also ein Vielfaches von grd sein.

Ist $\boldsymbol{b}$ die vom „Kelvin-Nullpunkt" aus gemessene Temperatur, $\boldsymbol{b}'$ die vom „Celsius-Nullpunkt" aus gemessene, so gilt

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}' = 273{,}16\,\mathrm{grd}. \tag{2.2}$$

Sowohl $\boldsymbol{b}$ als auch $\boldsymbol{b}'$ sind dabei in grd (oder einem Vielfachen davon) zu messende Temperaturpunkte, also keine V-Elemente. Dagegen ist $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}'$ ein V-Element, und (2.2) ist eine Gleichung zwischen solchen, also eine „Größengleichung".

Entsprechendes gilt bei der Angabe von „Zeitpunkten" (Abfahrts- und Ankunftszeiten), „Höhenpunkten" und „Überdrücken". So ist beispielsweise die Gleichung

$$13\,^{\mathrm{h}}\mathrm{MEZ} = 12\,^{\mathrm{h}}\mathrm{WEZ} \tag{2.3}$$

von derselben Art wie die Gleichung (2.1). Wird sie mit 1/2 multipliziert, so erscheint das offensichtlich falsche Ergebnis

$$6^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}\,\mathrm{MEZ} = 6\,^{\mathrm{h}}\mathrm{WEZ};$$

desgleichen, wenn man zu ihr die (sinnvolle) Gleichung $2\,^{\mathrm{h}}\mathrm{MEZ} = 1\,^{\mathrm{h}}\mathrm{WEZ}$ addiert. Das ergäbe die (sinnlose) Gleichung $15\,^{\mathrm{h}}\mathrm{MEZ} = 13\,^{\mathrm{h}}\mathrm{WEZ}$. Dies rührt davon her, daß (2.3) eine Beziehung zwischen „Zeitpunkten", aber nicht zwischen „Zeitdifferenzen" ist, und nur die letzteren sind V-Elemente.

Von den „Punkten" kann man stets zu „Vektoren", also zu V-Elementen, gelangen, indem man „Differenzen von Punkten" betrachtet und dann für den Vektorraum, dessen Elemente diese Differenzen sind, eine Basis festlegt. Beispielsweise kann man die Fahrtdauer eines Zuges (diese ist ein V-Element) bestimmen, indem man die Differenz „Ankunftszeit minus Abfahrtszeit" (Differenz von Zeitpunkten) bildet. Die Elemente des Vektorraumes „Zeit" sind also „Zeitdifferenzen". Dagegen führt die Bildung der Summe zweier Zeitpunkte (Abfahrtszeit plus Ankunftszeit) zu keinem physikalisch sinnvollen Ergebnis.

Schließlich sei noch daran erinnert, in welcher Weise auf einer Geraden gemessen wird. Als Maßeinheit wird ein orientiertes Geradenstück $\overrightarrow{OE}$ genommen (O und E sind zwei verschiedene Punkte der Geraden), das beispielsweise die Länge von 1 Meter hat. Wird $\overrightarrow{OE}$ von irgendeinem Punkt A der Geraden aus endlich oft, etwa ν mal in der Richtung OE um die Länge von $\overrightarrow{OE}$ verschoben, und wird dabei ein Punkt B der Geraden erreicht, dann schreibt man

$$\overrightarrow{AB} = \nu\,\overrightarrow{OE}, \tag{2.4}$$

wobei ν eine nichtnegative ganze Zahl ist. Bei der Verschiebung von $\overrightarrow{OE}$ im entgegengesetzten Sinne, d. h. in der Richtung von E nach O, gilt ebenfalls (2.4), wobei jetzt ν eine negative ganze Zahl ist. Die hierbei erforderlichen Verschiebungen von $\overrightarrow{OE}$ sind Translationen, bei denen die Länge von $\overrightarrow{OE}$ invariant ist. Wegen des Falls, daß ν keine ganze Zahl ist, sei auf die in der Einleitung zitierte Arbeit von *O. Hölder* [7] verwiesen.

Zwei auf einer Geraden liegende gerichtete Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ sind „äquivalent" in dem eingangs dieses Paragraphen erklärten Sinne, wenn $\overrightarrow{AB}$ auf der Geraden so *verschoben* werden kann, daß A mit A' und B mit B' zusammenfällt. Obgleich die gerichteten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ im allgemeinen verschiedene Punkte der Geraden enthalten, stellen sie denselben freien Vektor dar, also auch dasselbe V-Element.

§ 3. Multiplikation von V-Elementen

Im Kalkül können, wie gezeigt, Elemente ein- und desselben Vektorraumes addiert (subtrahiert) werden, außerdem können die Elemente eines Vektorraumes noch mit Zahlen (Elementen von Ω) multipliziert werden. Dagegen sei Addition (Subtraktion) von V-Elementen, die verschiedenen Vektorräumen angehören, nicht zugelassen, da es beispielweise „physikalisch sinnlos" ist, 2 Meter und 3 Sekunden zu addieren. Demnach werde gefordert:

Elemente verschiedener Vektorräume können nicht additiv verknüpft werden.

Aus dieser Eigentümlichkeit der algebraischen Struktur des Kalküls folgt:

Die Elemente der V-Menge bilden keinen Ring.

Dagegen werden in diesem Kalkül V-Elemente multiplikativ verknüpft; auch die Division tritt auf. Im folgenden soll zunächst die Multiplikation von V-Elementen betrachtet werden. Es seien A und B zwei Vektorräume, die nicht verschieden sein müssen, ferner sei $a \in A$, $b \in B$.

4. Zwischen je zwei Elementen $a \in A$ und $b \in B$ sei eine *multiplikative Verknüpfung* erklärt, welche dem Elementepaar (a, b) genau ein V-Element zuordnet, das mit ab bezeichnet wird. Dieses V-Element wird das *Produkt* aus a und b genannt.

Diese multiplikative Verknüpfung besitze die folgenden Eigenschaften:

4.1 Ist $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$, so gilt
$(ab)\,c = a\,(bc)$ (assoziatives Gesetz)

4.2 $ab = ba$ (kommutatives Gesetz)

4.3 $(\alpha a)\,b = \alpha\,(ab)$ (assoziatives Gesetz bezüglich der Multiplikation mit einem Element von Ω)

4.4 Die Menge aller Produkte ab mit $a \in A$ und $b \in B$ bildet einen eindimensionalen Vektorraum über Ω; er werde mit AB bezeichnet (Stabilität des Produktes).

4.5 Ist a von dem Nullelement von A verschieden, b von dem Nullelement von B, so ist das Produkt ab von dem Nullelement von AB verschieden (Nullteilerfreiheit).

Nachstehend einige Folgerungen, die aus den Eigenschaften 4. gezogen werden können.

a) Ist $a \in A$ und sind b_1 und $b_2 \in B$, so ist

$$a\,(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2.$$

In der Tat, ist b_0 eine Basis von B und $b_1 = \beta_1 b_0$, $b_2 = \beta_2 b_0$, so ergibt sich aus dem distributiven Gesetz 2.2

$$\begin{aligned} a\,(b_1 + b_2) &= a\,(\beta_1 b_0 + \beta_2 b_0) = a\,(\beta_1 + \beta_2)\,b_0 \\ &= a\beta_1 b_0 + a\beta_2 b_0 = ab_1 + ab_2. \end{aligned}$$

b) Es sei a_0 eine Basis von A, b_0 eine Basis von B. Dann kann man schreiben

$$a = \alpha a_0, \; b = \beta b_0.$$

Aus den Eigenschaften 4. folgt

$$ab = (\alpha\beta)\,(a_0 b_0).$$

Nach 4.5 ist $a_0 b_0$ von dem Nullelement von AB verschieden und kann daher als Basis des Vektorraumes AB genommen werden. Die Koordinate von ab bezüglich der Basis $a_0 b_0$ ist $\alpha\beta = \gamma$. Indem man γ sämtliche Elemente von Ω durchlaufen läßt, erhält man sämtliche Elemente des Vektorraumes AB. Wegen der Invarianz der Darstellung sind die auf diese Weise erzeugten Elemente von AB von der Wahl der Basis $a_0 b_0$ unabhängig.

c) *Die V-Elemente bilden eine kommutative Halbgruppe*, d. h., die Menge der V-Elemente besitzt die folgenden Eigenschaften:

a′) das Produkt zweier V-Elemente ist ein V-Element,

b′) die Multiplikation ist assoziativ,

c′) die Multiplikation ist kommutativ.

d) Durch vollständige Induktion kann gezeigt werden, daß bei einem Produkt von mehr als drei Faktoren das Ergebnis unabhängig davon ist, in welcher Weise die Faktoren assoziiert werden. Auch können wegen des kommutativen Gesetzes die Faktoren in beliebiger Weise untereinander vertauscht werden, ohne daß sich der Wert des Produktes ändert.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ Elemente des Vektorraumes A. Mit $a_\lambda = \alpha_\lambda a_0$, worin a_0 eine Basis von A ist, folgt nach 4.

$$\prod_{\lambda=1}^{\mu} a_\lambda = \left(\prod_{\lambda=1}^{\mu} \alpha_\lambda\right) a_0{}^{\mu}.$$

Das Produkt $\prod_{\lambda=1}^{\mu} a_\lambda$ ist Element eines Vektorraumes, der mit A^μ bezeichnet werden soll; $a_0{}^\mu$ ist eine Basis dieses Vektorraumes. Ist $a \in A$ mit $a = \alpha a_0$, so ist $a^\mu = \alpha^\mu a_0{}^\mu$, also wiederum ein Element des Vektorraumes A^μ. Die Elemente des Vektorraumes A^μ werden im folgenden gelegentlich mit $a^{(\mu)}$ bezeichnet.

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ Elemente des Vektorraumes A, $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ Elemente des Vektorraumes B, so ist das Produkt aus diesen Elementen

$$\left(\prod_{\varkappa=1}^{\mu} a_\varkappa\right) \left(\prod_{\lambda=1}^{\nu} b_\lambda\right)$$

ein Element des Vektorraumes $A^\mu B^\nu$. Ist a_0 eine Basis von A, b_0 eine Basis von B, so ist $a_0{}^\mu b_0{}^\nu$ eine Basis des Vektorraumes $A^\mu B^\nu$.

Das V-Element $ab \in AB$ wird im allgemeinen weder Element von A noch von B sein, d. h., daß durch die multiplikative Verknüpfung zweier V-Elemente ein Vektorraum erzeugt wird, der im allgemeinen von denen der Faktoren verschieden sein wird. Ist beispielsweise A der Vektorraum der Längen des eindimensionalen euklidischen Raumes, so ist A^2 der Vektorraum der Flächeninhalte des zweidimensionalen euklidischen Raumes, A^3 der Vektorraum der Volumina des dreidimensionalen euklidischen Raumes usw. Hier sind die Vektorräume $A, A^2, A^3, \ldots$ disjunkt, was besagt, daß eine Länge, also ein Element von A, und ein Flächeninhalt, also ein Element von A^2, nicht Elemente desselben Vektorraumes sein und infolgedessen auch nicht addiert werden können.

Hat A die oben angegebene Bedeutung und ist B beispielsweise der Vektorraum der „Zeitdifferenzen", also ein von A verschiedener Vektorraum, so tritt in Verallgemeinerung des vorhin betrachteten Vektorraumes A^2, also des Begriffes „Länge $\times$ Länge"-Vektorraum, hier der Begriff des „Länge $\times$ Zeit"-Vektorraumes auf. Der letztere, gekennzeichnet durch $A\,B$, ist sowohl von A als auch von B verschieden. Die Elemente von $A\,B$ können infolgedessen nicht additiv mit denen von A oder denen von B verknüpft werden.

Durch Verallgemeinerung der vorstehenden Überlegungen wird man darauf geführt, ein System von ϱ Vektorräumen $A, B, \ldots, L$ zu betrachten (ϱ natürliche Zahl), dazu die Menge

$$\mathfrak{N} = \{ A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda \}, \qquad \alpha, \beta, \ldots, \lambda \text{ natürliche Zahlen}$$

der Vektorräume, die aus diesem System erzeugt wird. Unter den Systemen von ϱ Vektorräumen sind diejenigen ausgezeichnet, bei denen die von ihnen erzeugte Menge $\mathfrak{N}$ von Vektorräumen nur paarweise disjunkte Vektorräume enthält.

Definition: Ein aus ϱ Vektorräumen $A, B, \ldots, L$ bestehendes System wird ein freies System vom Rang (von der Ordnung) ϱ genannt, wenn die Elemente von $\mathfrak{N}$ paarweise disjunkte Vektorräume sind; im anderen Fall wird das System gebunden genannt. Die ϱ Vektorräume $A, B, \ldots, L$ werden die Erzeugenden des freien Systems genannt.

Es sei $A, B, \ldots, L$ ein freies System vom Rang ϱ,

$\xi a_0^\alpha b_0^\beta \ldots l_0^\lambda$ ein Element des Vektorraumes $A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$,

$\xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'}$ ein Element des Vektorraumes $A^{\alpha'} B^{\beta'} \ldots L^{\lambda'}$.

Ist

$$\xi a_0^\alpha b_0^\beta \ldots l_0^\lambda \equiv \xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'} \pmod{R_1},$$

dann ist

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = (\alpha', \beta', \ldots, \lambda').$$

Wären nämlich die beiden ϱ-tupel verschieden, so würden die beiden in Rede stehenden Elemente verschiedenen Vektorräumen angehören, könnten also nicht R_1-äquivalent sein.

Wenn in der Physik von *Dreier-*, *Vierer-* oder *Fünfersystemen* die Rede ist, so sind damit *freie Systeme* vom Rang 3, 4 oder 5 gemeint. Die oben eingeführten Vektorräume $A, B, \ldots, L$, also die Erzeugenden des freien Systems, bezeichnet *R. Fleischmann* [11] als „Basisgrößenarten", auch „Ausgangsgrößenarten".

§ 4. Freie Systeme mit einer Erzeugenden

Der Einfachheit halber möge zunächst der Fall eines freien Systems vom Rang 1 betrachtet werden; Erzeugende sei der Vektorraum A. Die Menge $\mathfrak{N}$ besteht dann aus den Vektorräumen $A, A^2, \ldots$. Da A Erzeugende eines freien Systems ist, sind gemäß der Definition für ein freies System diese Vektorräume paarweise disjunkt.

Es wird die Vereinigungsmenge der Elemente der Vektorräume $A, A^2, \ldots$ gebildet. Aus dieser Vereinigungsmenge werden die zu den Vektorräumen

$A, A^2, \ldots$ gehörenden Nullelemente herausgenommen. Dies geschieht, um die Division von V-Elementen, von welcher weiter unten die Rede sein wird, uneingeschränkt möglich zu machen. Die so erhaltene Menge von Elementen von Vektorräumen werde $\mathfrak{S}$ genannt, ihre Elemente sind dann sämtliche von Null verschiedenen Elemente aus den Vektorräumen $A, A^2, \ldots$.

Da die Multiplikation zweier Elemente von $\mathfrak{S}$ stets wieder ein Element von $\mathfrak{S}$ liefert, also interne Komposition vorliegt, und das assoziative und kommutative Gesetz gilt, bilden die Elemente von $\mathfrak{S}$ ebenfalls eine „*kommutative Halbgruppe*".

Satz 1. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind „regulär", d. h. aus

$$a^{(\nu)}\, x = a^{(\nu)}\, x', \qquad a^{(\nu)} = \alpha\, a_0{}^{\nu} \qquad \textit{mit } a^{(\nu)},\ x,\ x' \in \mathfrak{S}$$

folgt $x = x'$.

In der Tat, ist $x = a^{(\mu)} = \xi a_0{}^{\mu} \in \mathfrak{S}$ und $x' = a^{(\mu')} = \xi' a_0{}^{\mu'} \in \mathfrak{S}$, so ist

$$\alpha\, \xi\, a_0{}^{\nu+\mu} = \alpha\, \xi'\, a_0{}^{\nu+\mu'}, \tag{4.1}$$

wo das links stehende Produkt dem Vektorraum $A^{\nu+\mu}$ angehört, das rechts stehende dem Vektorraum $A^{\nu+\mu'}$. Die Gleichung (4.1) verlangt also, daß diese beiden Vektorräume nicht disjunkt sind. Da A Erzeugende eines freien Systems ist, sind diese Vektorräume nur dann nicht disjunkt, wenn $\mu = \mu'$ ist. Es müssen also x und x' demselben Vektorraum $A^{\nu+\mu}$ angehören. Außerdem verlangt (4.1), daß $\alpha\xi = \alpha\xi'$ ist. Daraus folgt wegen $\alpha \neq 0$, daß $\xi = \xi'$ ist, d. h., daß $x = x'$ ist.

Da jede Halbgruppe, deren Elemente regulär sind, eine „*Semigruppe*" genannt wird, ist $\mathfrak{S}$ eine „*kommutative Semigruppe*".

Wie steht es mit der *Division*? Bei der Division wird nach einem Element $x \in \mathfrak{S}$ gefragt, welches Lösung der Gleichung

$$a^{(\mu)}\, x = a^{(\nu)} \qquad a^{(\mu)},\ a^{(\nu)} \in \mathfrak{S} \tag{4.2}$$

ist. Wenn diese Gleichung überhaupt eine Lösung hat, dann kann sie nicht mehr als eine haben. Besäße sie nämlich zwei Lösungen $x, x' \in \mathfrak{S}$, so müßte

$$a^{(\mu)}\, x = a^{(\nu)} = a^{(\mu)}\, x'$$

sein. Da die Elemente von $\mathfrak{S}$ regulär sind, folgt $x = x'$.

In $\mathfrak{S}$ ist die Division aber nur unter einschränkenden Voraussetzungen möglich, nämlich genau dann, wenn $\mu < \nu$ ist.

In der Tat, ist $\mu < \nu$ und $a^{(\mu)} = \alpha a_0{}^{\mu}$, $a^{(\nu)} = \alpha' a_0{}^{\nu}$, $x = \xi a_0{}^{\lambda}$, so folgt durch Einsetzen in (4.2)

$$(\alpha\, \xi)\, a_0{}^{\mu+\lambda} = \alpha'\, a_0{}^{\nu}.$$

Die auf beiden Seiten stehenden Elemente müssen demselben Vektorraum angehören, also muß $\mu + \lambda = \nu$ sein. Die letzte Gleichung ist genau dann durch eine natürliche Zahl λ lösbar, wenn $\mu < \nu$ ist; es ist dann $\lambda = \nu - \mu$.

Dagegen ist die Division nicht ausführbar, wenn $\mu \geqq \nu$ ist, denn dann ist die Gleichung $\mu + \lambda = \nu$ für keine natürliche Zahl λ lösbar. Damit ist gezeigt, daß die Division in $\mathfrak{S}$ nur bedingt, aber nicht im allgemeinen ausführbar ist.

Nun wird aber im Größenkalkül mit Symbolen wie beispielsweise $(\text{Meter})^{-1}$, $(\text{Meter})^{-2}$ und $(\text{Sekunde})^{-1}$ operiert, ohne daß gesagt wird, was unter einer „Einheit" wie $(\text{Meter})^{-1}$ zu verstehen sei. Offensichtlich bedarf ein solches Vorgehen einer mathematischen Begründung. Eine solche soll im folgenden gegeben werden.

§ 5. Einbettung einer kommutativen Semigruppe in eine Gruppe

Aus den bisherigen Darlegungen geht hervor, daß die Semigruppe $\mathfrak{S}$ „zu wenig" Elemente enthält, um die Division uneingeschränkt ausführen zu können. Man wird daher versuchen, ähnlich wie bei der Erweiterung des Bereiches der ganzen Zahlen zu dem der rationalen Zahlen, von der Semigruppe $\mathfrak{S}$ zu einer Gruppe $\mathfrak{G}$ zu gelangen. Ausführliche Darstellungen dieses Verfahrens sind zu finden bei *N. Bourbaki* [22], *M. Queysanne* und *A. Delachet* [23] und *P. Dubreil* [24]. Um dieses Vorgehen deutlich zu machen, sei zunächst daran erinnert, daß eine Menge $\mathfrak{G}$ eine *Gruppe* genannt wird, wenn ihre Elemente die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) die Elemente von $\mathfrak{G}$ bilden eine Halbgruppe;

b) in $\mathfrak{G}$ gibt es ein neutrales Element;

c) zu jedem Element von $\mathfrak{G}$ gibt es ein inverses.

Gilt außerdem das kommutative Gesetz, dann wird $\mathfrak{G}$ eine *kommutative* oder *Abelsche Gruppe* genannt.

Aus diesen Eigenschaften folgt, daß alle Elemente einer Gruppe regulär sind, jede Gruppe also eine Semigruppe ist. Außerdem folgt aus der Existenz des inversen Elementes, daß die Division in einer Gruppe uneingeschränkt und eindeutig ausführbar ist. Auf Grund dieser Eigenschaften der Gruppe wird es möglich sein, Symbolen wie $(\text{Meter})^{-1}$ und $(\text{Sekunde})^{-1}$ einen Sinn zu geben.

Von der kommutativen Semigruppe $\mathfrak{S}$ gelangt man zu einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, indem man die kommutative Semigruppe „symmetrisiert" und sie dabei „in eine Gruppe einbettet". Der Einfachheit halber seien im folgenden die Elemente von $\mathfrak{S}$ mit $x, y, \ldots$ bezeichnet (es wird also davon abgesehen zu kennzeichnen, welchem der Vektorräume das betreffende Element von $\mathfrak{S}$ angehört).

Von $\mathfrak{S}$ gelangt man zu $\mathfrak{G}$, indem man die Menge aller Paare von Elementen aus $\mathfrak{S}$ betrachtet, also die Menge

$$\{(x, y), (x', y'), \ldots\} \qquad \text{mit } x, y, x', y', \ldots \in \mathfrak{S}.$$

Diese Menge wird das „kartesische Produkt" der Menge $\mathfrak{S}$ mit sich selbst genannt und durch $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ bezeichnet. Nunmehr wird zwischen den Elementen der Menge $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ eine multiplikative Verknüpfung erklärt.

Definition. Unter dem Produkt zweier Paare (x, y) und (x', y') der Menge $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ wird das Paar (xx', yy') verstanden,

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy').$$

Bei dieser Verknüpfung werden die Paare „komponentenweise" multipliziert.

Das Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ist wiederum ein Element von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, es liegt also interne Komposition vor. Offensichtlich ist diese multiplikative Verknüpfung *assoziativ* und *kommutativ*.

Jetzt wird in der Menge $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ eine „Äquivalenzrelation" eingeführt. *Definition. Zwei Paare (x, y) und (x', y') der Menge $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ werden genau dann äquivalent genannt, wenn*

$$xy' = x'y. \tag{R_2}$$

Genügen zwei Elemente von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ der Äquivalenzrelation (R_2), dann schreibt man kurz

$$(x, y) \equiv (x', y') \pmod{R_2}.$$

Diese Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Durch die Äquivalenzrelation (R_2) werden die Elemente der Menge $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ in „disjunkte Klassen" zerlegt. Jede dieser Klassen ist gekennzeichnet durch irgend eines der in ihr enthaltenen Paare, denn ist (x, y) ein gegebenes Paar von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, so erhält man sämtliche Elemente der durch das Paar (x, y) repräsentierten Klasse, indem man sämtliche Paare aufsucht, die zu (x, y) äquivalent sind. Die zu (x, y) gehörende Klasse werde mit $[x, y]$ bezeichnet. Die Menge der Klassen, in welche die Elemente von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ zerlegt werden, wird die Quotientenmenge von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ in bezug auf (R_2) genannt und mit $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$ bezeichnet.

Zwischen den Klassen, in welche $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ durch die Äquivalenzrelation (R_2) zerlegt wird, also zwischen den Elementen der Quotientenmenge $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$, kann eine multiplikative Verknüpfung erklärt werden.

Definition. Unter dem Produkt der beiden Klassen $[x, y]$ und $[x', y']$ wird die Klasse $[xx', yy']$ verstanden,

$$[x, y]\,[x', y'] = [xx', yy']. \tag{M}$$

Diese Verknüpfung ist eindeutig, und ihr Ergebnis ist unabhängig davon, durch welches ihrer Paare die betreffende Klasse repräsentiert wird. In der Tat, ist

$$(x_1, y_1) \equiv (x, y) \pmod{R_2}, \ (x_1', y_1') \equiv (x', y') \pmod{R_2}, \tag{5.1}$$

so ist nach der Definition des Produktes zweier Klassen

$$[x, y]\,[x', y'] = [xx', yy'] \text{ und } [x_1, y_1]\,[x_1', y_1'] = [x_1x_1', y_1y_1'].$$

Es ist

$$(x_1x_1', y_1y_1') \equiv (xx', yy') \pmod{R_2}. \tag{5.2}$$

Auf Grund der Äquivalenzrelationen (5.1) gilt nämlich

$$x_1y = xy_1 \qquad\qquad x_1'y' = x'y_1'.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$x_1x_1'yy' = xx'y_1y_1',$$

woraus (5.2) folgt. Damit ist gezeigt, daß das Produkt zweier Klassen wieder eine Klasse liefert, also in der Menge der Klassen interne Komposition vorliegt.

Daß diese multiplikative Verknüpfung der Klassen *assoziativ* und *kommutativ* ist, kann unmittelbar durch Ausrechnen bestätigt werden.

Es gibt in der Menge der Klassen ein *neutrales Element;* dies ist die Klasse $[x, x]$. In der Tat, ist $[y, z]$ irgendeine der Klassen, und wird diese Klasse mit der Klasse $[x, x]$ multiplikativ verknüpft, so entsteht

$$[y, z]\,[x, x] = [x, x]\,[y, z] = [xy, xz].$$

Die letzte Klasse ist dieselbe wie die Klasse $[y, z]$, denn

$$(xy, xz) \equiv (y, z) \pmod{R_2}.$$

In der Menge der Klassen gibt es zu jedem Element ein *inverses.* Ist $[x, y]$ irgendeine der Klassen, so gehört zu ihr als inverses Element die Klasse $[y, x]$, denn es ist

$$[x, y]\,[y, x] = [xy, xy],$$

und die letzte Klasse ist wegen $(xy, xy) \equiv (x, x) \pmod{R_2}$ das neutrale Element.

Damit ist bewiesen der

Satz 1. Die Klassen von Paaren von V-Elementen, d. h. die Elemente der Quotientenmenge $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$, *bilden bezüglich der Verknüpfung (M) eine Abelsche Gruppe* $\mathfrak{G}$.

Während die Elemente von $\mathfrak{S}$ V-Elemente sind, sind die Elemente von $\mathfrak{G}$ „Klassen von Paaren von V-Elementen".

Zwischen den Elementen von $\mathfrak{S}$ und den Elementen einer echten Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ läßt sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen. Ist $x \in \mathfrak{S}$, dann wird durch die Abbildung

$$x \to [xy, y], \qquad y \in \mathfrak{S}$$

jedem Element $x \in \mathfrak{S}$ genau eine Klasse, d. h. ein Element von $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ zugeordnet. Verschiedenen Elementen von $\mathfrak{S}$ entsprechen verschiedene Elemente von $\mathfrak{G}'$. In der Tat, ist $x' \neq x$ und gilt:

$$x \to [xy, y], \qquad x' \to [x'z, z]$$

so müßte, wäre $[xy, y] = [x'z, z]$, $(xy, y) \equiv (x'z, z) \pmod{R_2}$ sein, d. h. $x\,(yz) = x'\,(yz)$. Wegen der Regularität der Elemente von $\mathfrak{S}$ würde hieraus $x = x'$ folgen. Die Bilder der Elemente von $\mathfrak{S}$ machen deshalb eine echte Teilmenge von $\mathfrak{G}$ aus, weil es in der Semigruppe $\mathfrak{S}$ kein neutrales Element und daher auch kein zu x inverses Element gibt.

Es seien x und x' zwei Elemente von $\mathfrak{S}$. Ihre Bilder sind die Klassen $[xy, y]$ und $[x'z, z]$ mit $y \in \mathfrak{S}$ und $z \in \mathfrak{S}$. Das Bild des Produktes xx' ist die Klasse $[xx'u, u]$ mit $u \in \mathfrak{S}$, während das Produkt der Bilder die Klasse $[xx'yz, yz]$ liefert. Wegen $(xx'u, u) \equiv (xx'yz, yz) \pmod{R_2}$ ist dies aber dieselbe Klasse, d. h. das Bild des Produktes ist gleich dem Produkt der Bilder.

Daraus folgt der

Satz 2. Die Semigruppe $\mathfrak{S}$ *ist isomorph zu einer echten Teilmenge von* $\mathfrak{G}$.

Damit ist die Semigruppe $\mathfrak{S}$ in die Gruppe $\mathfrak{G}$ eingebettet. Die Elemente der Quotientenmenge von $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$, sie sind Klassen von Paaren von V-Elementen, können als „verallgemeinerte V-Elemente" angesehen werden. Dabei kann jedes Element von $\mathfrak{S}$, also jedes V-Element im ursprünglichen Sinne mit dem ihm zugeordneten Element von $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$, also einem „verallgemeinerten" V-Element „identifiziert" werden. Das Wort „identifiziert" besagt, daß von diesen beiden ihrer Definition nach verschiedenen Begriffen im Kalkül jeder durch den anderen vertreten werden kann, ohne daß dies von Einfluß auf das Ergebnis ist. Man kann daher ohne Bedenken verallgemeinerte V-Elemente in gleicher Weise bezeichnen wie V-Elemente im ursprünglichen Sinne, etwa durch $x, y \ldots$. Von dieser Möglichkeit wird im folgenden des öfteren Gebrauch gemacht.

Aus dem soeben ausgesprochenen Satz folgt damit als fundamentale Eigenschaft der algebraischen Struktur des Kalküls:

Satz 3. Die von Null verschiedenen (verallgemeinerten) V-Elemente, welche durch die Multiplikationsvorschrift (M) verknüpft sind, bilden eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$.

§ 6. Über die Gruppe $\mathfrak{G}$

Der Einfachheit halber möge die Gruppe $\mathfrak{G}$ zunächst für den Fall eines *freien Systems vom Rang 1* untersucht werden. Ist A die einzige Erzeugende, und ist a_0 *irgendeine* Basis von A, dann ist $a_0{}^\nu$ eine Basis des Vektorraumes A^ν.

Für jedes Element $a^{(\nu)} \in A^\nu$ gilt

$$a^{(\nu)} \equiv a_0{}^\nu \pmod{R_1}.$$

Wird diese Äquivalenzrelation als *Abbildung* der Elemente von A^ν auf das Element $a_0{}^\nu$ angesehen, so ist diese Abbildung so beschaffen, daß jedem Element von A^ν genau ein Element $a_0{}^\nu$ zugeordnet ist,

$$f(a^{(\nu)}) = a_0{}^\nu. \tag{6.1}$$

Die Abbildung (6.1) ist eindeutig nur in der Richtung vom Original $a^{(\nu)}$ auf das Bild $a_0{}^\nu$, aber nicht umgekehrt, denn zu dem Bildelement $a_0{}^\nu$ gehören unendlich viele Originale, nämlich sämtliche Elemente des Vektorraumes A^ν. Diese Abbildung ist *homomorph*, d. h., es ist

$$f(a^{(\mu)} a^{(\nu)}) = f(a^{(\mu)})\, f(a^{(\nu)}),$$

also das Bild des Produktes gleich dem Produkt der Bilder. In der Tat, das Bild von $a^{(\mu)} a^{(\nu)}$ ist $a_0{}^{\mu+\nu}$. Aus $f(a^{(\mu)}) = a_0{}^\mu$ und $f(a^{(\nu)}) = a_0{}^\nu$ folgt dann die Behauptung.

Bemerkung. Erklärt man in der Menge der Vektorräume $A, A^2, \ldots$ eine multiplikative Verknüpfung durch die Festsetzung

$$A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu} \qquad \mu, \nu \text{ natürliche Zahlen},$$

so besteht eine *Isomorphie* zwischen den Elementen der Menge $a_0, a_0{}^2, \ldots$ und denjenigen der Menge $A, A^2, \ldots$. Ist nämlich A^ν das Bild von $a_0{}^\nu$,

$$f(a_0{}^\nu) = A^\nu, \qquad \nu \text{ natürliche Zahl}, \tag{6.2}$$

so ist diese Abbildung (Abbildungen werden hier und im folgenden unterschiedslos mit f bezeichnet, was nicht besagen soll, daß es sich um gleiche Abbildungen handelt) bei festgehaltener Basis a_0 umkehrbar eindeutig, und das Produkt der Bilder ist gleich dem Bild des Produktes

$$f(a_0^\mu)\, f(a_0^\nu) = f(a_0^{\mu+\nu}).$$

Es kommt daher bei der Untersuchung der Struktur auf dasselbe hinaus, ob die Menge der Basen $a_0, a_0^2, \ldots$ oder die Menge der Vektorräume $A, A^2, \ldots$ betrachtet wird.

Es handelt sich jetzt darum, die soeben für die Elemente der Vektorräume A^ν beschriebene Abbildung (6.1) auf die Elemente von $\mathfrak{G}$ auszudehnen. Es sei $[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu]$ ein Element von $\mathfrak{G}$, also eine Klasse von R_2-äquivalenten Paaren von V-Elementen. Dieses Element von $\mathfrak{G}$ soll als Bild die Klasse $[a_0^\mu, a_0^\nu]$ haben; es werde also definiert

$$f([\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu]) = [a_0^\mu, a_0^\nu]. \tag{6.3}$$

Diese Abbildung entspricht der Abbildung (6.1), die bei den Elementen der Vektorräume A^ν benutzt wurde. Durch (6.3) werden die Elemente von $\mathfrak{G}$ in disjunkte Klassen eingeteilt, denn jedes Element von $\mathfrak{G}$ hat genau ein Bild, und zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ werden derselben Klasse zugerechnet, wenn sie dasselbe Bild haben. Zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, welche dasselbe Bild haben, also derselben Klasse angehören, sollen R_3-äquivalent genannt werden. Zwei Bilder $[a_0^\mu, a_0^\nu]$ und $[a_0^{\mu'}, a_0^{\nu'}]$ sind aber genau dann gleich, wenn die Paare (a_0^μ, a_0^ν) und $(a_0^{\mu'}, a_0^{\nu'})$ R_2-äquivalent sind, d. h., wenn $a_0^{\mu+\nu'} = a_0^{\mu'+\nu}$ ist, also $\mu + \nu' = \mu' + \nu$, d. h.

$$\mu - \nu = \mu' - \nu' \tag{R_3}$$

ist. Die letzte Beziehung ist die *Äquivalenzrelation*, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ dasselbe Bild haben, also derselben Klasse angehören. Die Äquivalenzrelation (R_3) ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Gehören zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, etwa $[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu]$ und $[\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}]$ derselben Klasse an, dann schreibt man

$$[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu] \equiv [\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}] \pmod{R_3}.$$

In bezug auf das für die Elemente von $\mathfrak{G}$ gültige Verknüpfungsgesetz (M) stellt die Abbildung (6.3) einen *Homomorphismus* dar, d. h. das Bild des Produktes zweier Elemente von $\mathfrak{G}$ ist gleich dem Produkt der Bilder der Faktoren. In der Tat, sind $[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu]$ und $[\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}]$ zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist ihr Produkt

$$[\alpha\alpha' a_0^{\mu+\mu'}, \beta\beta' a_0^{\nu+\nu'}],$$

und das Bild des Produktes ist $[a_0^{\mu+\mu'}, a_0^{\nu+\nu'}] = [a_0^\mu, a_0^\nu]\,[a_0^{\mu'}, a_0^{\nu'}]$.

Da bei diesem Homomorphismus die Bilder wieder Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, liegt ein „Endomorphismus" vor.

Die Menge der Bilder, also die Menge der Klassen $[a_0^\mu, a_0^\nu]$ (μ, ν natürliche Zahlen), werde mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnet. Sie ist eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ und hat die folgenden Eigenschaften:

a) die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ bilden eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Halbgruppe,
b) das Bild des neutralen Elementes von $\mathfrak{G}$, also die Klasse $[a_0, a_0]$, ist neutrales Element von $\mathfrak{G}_0$,
c) inverse Elemente von $\mathfrak{G}$ haben als Bilder inverse Elemente von $\mathfrak{G}_0$.

Es gilt also der

Satz 1. Die Bilder der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_0$, die eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.

Die für die Elemente von $\mathfrak{G}$ gültige multiplikative Verknüpfung (M) gilt, wie sich durch Ausrechnen zeigen läßt, auch für die Klassen von $\mathfrak{G}$. Infolgedessen ist die Quotientenmenge $\mathfrak{G}/R_3$, d. i. die Menge der Klassen, in welche die Elemente von $\mathfrak{G}$ durch die Äquivalenzrelation (R_3) zerlegt werden, isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{G}_0$. Es gilt daher der

Satz 2. Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{G}/R_3$, das sind die Klassen von $\mathfrak{G}$, bilden eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe.

Die letzte Gruppe wird die *Quotientengruppe* von $\mathfrak{G}$ in bezug auf (R_3) genannt.

Eine besondere Rolle kommt denjenigen Elementen von $\mathfrak{G}$ zu, die als Bild das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$ haben. Es sind dies die Klassen $[\alpha a_0, \beta a_0]$; ihre Menge bildet einen „Normalteiler" $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, denn es gilt der folgende

Satz 3. Ist $\mathfrak{G}_0$ eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe, dann bilden diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Bild das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$ ist, einen Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$.

Beweis. Die Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß mit je zwei Elementen x und x' aus $\mathfrak{H}$ auch das Produkt $x' x^{-1}$ ein Element von $\mathfrak{H}$ ist. Mit $x = [\alpha a_0, \beta a_0]$ und $x' = (\alpha' a_0, \beta' a_0]$ folgt in der Tat

$$x' x^{-1} = [\alpha' a_0, \beta' a_0]\,[\beta a_0, \alpha a_0] = [\alpha' \beta a_0^2, \alpha \beta' a_0^2] \in \mathfrak{H}$$

Nun wird aber eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ (auch ausgezeichnete oder invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$) genannt, wenn aus $x^{-1} x' \in \mathfrak{H}$ mit $x, x' \in \mathfrak{G}$ folgt $x' x^{-1} \in \mathfrak{H}$ und umgekehrt. Da $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe ist, ist jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein Normalteiler, w. z. b. w.

Satz 4. Die durch die homomorphe Abbildung (6.3) definierte Äquivalenzrelation (R_3) ist gleichwertig mit der Relation

$$x^{-1} x' \in \mathfrak{H} \qquad (x, x' \in \mathfrak{G}).$$

Ist nämlich $x = [\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]$ und $x' = [\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}]$, dann ist

$$x^{-1} x' = [\alpha' \beta a_0^{\mu' + \nu}, \alpha \beta' a_0^{\mu + \nu'}].$$

Damit $x^{-1} x' \in \mathfrak{H}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mu' + \nu = \mu + \nu'$ ist, also

$$\mu - \nu = \mu' - \nu'.$$

Das ist aber die Äquivalenzrelation (R_3). Die Quotientenmenge $\mathfrak{G}/R_3$ kann daher auch durch $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ bezeichnet werden; sie ist eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe und somit zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ wird *Quotientengruppe*, auch *Faktorgruppe* genannt.

§ 7. Vektorräume verallgemeinerter V-Elemente

In § 1 wurde gefordert, daß die V-Elemente Elemente von Vektorräumen sind. Es erhebt sich die Frage, ob auch für die verallgemeinerten V-Elemente, also die Elemente von $\mathfrak{G}$, eine solche Struktur angegeben werden kann.

Satz 1. Die Elemente jeder durch die Äquivalenzrelation (R_3) definierten Klasse von $\mathfrak{G}$ bilden mit den nachstehend angegebenen Verknüpfungen (V_1) und (V_2) einen Vektorraum.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Elemente jeder durch (R_3) definierten Klasse von $\mathfrak{G}$ — es sind dies diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, welche dasselbe Element von $\mathfrak{G}_0$ als Bild haben — additiv verknüpft werden können, so daß die Summe zweier Elemente derselben Klasse wieder ein Element der betreffenden Klasse ist (interne Komposition). Es sei

$$[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}] \equiv [\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}] \ (\mathrm{mod}\ R_3),$$

also

$$\mu - \nu = \mu' - \nu'.$$

Als Summe der beiden äquivalenten Elemente wird erklärt

$$[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}] + [\alpha' a_0^{\mu'}, \beta' a_0^{\nu'}] = [\alpha\beta' a_0^{\mu+\nu'} + \alpha'\beta a_0^{\mu'+\nu}, \beta\beta' a_0^{\nu+\nu'}] \qquad (V_1)$$

Die Summe ist jedem der Summanden R_3-äquivalent, gehört also derselben Klasse an wie die Summanden.

Ist $[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]$ Repräsentant einer Klasse von R_3-äquivalenten Elementen und wird in jeder solchen Klasse zusätzlich $[0 \cdot a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]$ mit $\beta \neq 0$ als Nullelement eingeführt, so kann gezeigt werden, daß die Elemente jeder Klasse von $\mathfrak{G}$ den Forderungen 1.1 bis 1.4 genügen. Somit gilt:

Die Elemente ein und derselben Klasse von $\mathfrak{G}$ bilden mit der Addition (V_1) einen Modul.

Außerdem sei noch eine multiplikative Verknüpfung (V_2) eines Elementes ϱ von Ω mit einem Element von $\mathfrak{G}$ erklärt. Es sei

$$\varrho\,[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}] = [\varrho\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]. \qquad (V_2)$$

Diese Verknüpfung ist so beschaffen, daß sie dem Element $[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]$ ein R_3-äquivalentes Element, also ein Element derselben Klasse zuordnet (externe Komposition). Offensichtlich sind für diese Verknüpfung die Forderungen 2.1 bis 2.4 erfüllt.

Damit ist nachgewiesen, daß die Elemente einer Klasse von $\mathfrak{G}$ einen „Vektorraum" bilden. Dieser Vektorraum ist eindimensional. In der Tat, ist $[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}]$ ein beliebiges Element des Vektorraumes und wird als Basis desselben beispielsweise das Element $[a_0^{\mu}, a_0^{\nu}]$ genommen, so gilt nach (V_2)

$$[\alpha a_0^{\mu}, \beta a_0^{\nu}] \doteq [(\alpha/\beta)\, a_0^{\mu}, a_0^{\nu}] = (\alpha/\beta)\,[a_0^{\mu}, a_0^{\nu}].$$

Eine Sonderstellung nehmen diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$ ein, die Elemente des Normalteilers $\mathfrak{H}$ sind, also die Elemente der Klassen $[\alpha a_0, \beta a_0]$. Diese Elemente werden in der Physik als „dimensionslose Größen" bezeichnet.

Satz 2. Wird zu den Elementen des Normalteilers $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ noch das Nullelement $[0 \cdot a_0, a_0]$ hinzugefügt, so ergibt sich ein kommutativer Körper K, der isomorph zu dem Körper Ω ist.

Zum Beweis ist zuerst zu zeigen, daß die Elemente von K einen kommutativen *Ring* bilden, d. h., daß sie die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) K ist eine Abelsche Gruppe bezüglich der Addition, also ein Modul,

b) die Multiplikation in K ist assoziativ und kommutativ,

c) die Multiplikation ist distributiv in bezug auf die Addition.

Die Eigenschaften a) und b) wurden schon oben nachgewiesen. Der Nachweis von c) erfolgt durch Ausrechnen nach Einsetzen von $[\alpha a_0, \beta a_0]$, $[\alpha' a_0, \beta' a_0], \ldots$.

Die Elemente von $\mathfrak{H}$, das sind die von Null verschiedenen Elemente von K, bilden in bezug auf die Multiplikation eine Abelsche Gruppe, denn als Normalteiler ist $\mathfrak{H}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Also ist K ein kommutativer Körper.

Bleibt zu zeigen, daß K isomorph zu dem Körper Ω ist. In der Tat, wird dem Element $[\alpha a_0, \beta a_0]$ von K durch die Abbildung

$$f(\alpha a_0, \beta a_0) = \alpha/\beta \tag{7.1}$$

die Zahl α/β zugeordnet (nach Definition von K ist $\beta \neq 0$), so ist (bei festem a_0) diese Abbildung umkehrbar eindeutig, denn es ist $[\alpha a_0, \beta a_0] = (\alpha/\beta)\,[a_0, a_0]$. Die Erhaltung der Verknüpfungsgesetze folgt aus (V_1) und (V_2),

$$\begin{aligned} f([\alpha a_0, \beta a_0]) + f([\alpha' a_0, \beta' a_0]) &= f([(\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, a_0, \beta\beta' a_0]), \\ f([\alpha a_0, \beta a_0]) \cdot f([\alpha' a_0, \beta' a_0]) &= f([\alpha\alpha' a_0, \beta\beta' a_0]). \end{aligned}$$

Also ist die soeben definierte Abbildung isomorph, womit der Satz bewiesen ist.

Wird das Element $[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu]$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Element $[\alpha' a_0, \beta' a_0]$ von $\mathfrak{H}$ multipliziert, so entsteht

$$[\alpha\alpha' a_0{}^{\mu+1}, \beta\beta' a_0{}^{\nu+1}] \in \mathfrak{G}$$

Dieses Element ist R_3-äquivalent zu $[\alpha a_0{}^\mu, \beta a_0{}^\nu]$, gehört also demselben Vektorraum an wie $[\alpha a_0{}^\mu, \beta a_0{}^\nu]$. Dasselbe Ergebnis kommt zum Vorschein, wenn $[\alpha a_0{}^\mu, \beta a_0{}^\nu]$ mit der Zahl α'/β' multipliziert wird, nämlich

$$[\alpha\alpha' a_0{}^\mu, \beta\beta' a_0{}^\nu] = [\alpha\alpha' a_0{}^{\mu+1}, \beta\beta' a_0{}^{\nu+1}].$$

Dies besagt, daß von den beiden ihrer Definition nach verschiedenen Begriffen „Zahl" und „Element von K" (ein solches ist eine Klasse von Paaren von V-Elementen) innerhalb des Kalküls jeder durch den anderen vertreten werden kann, ohne daß dies von Einfluß auf das Ergebnis ist.

Dieser Umstand hat dazu geführt, daß sowohl in der Theorie als auch in der Praxis die Elemente von K mit den Zahlen, also den Elementen von Ω „*identifiziert*" werden (vgl. z. B. *v. d. Waerden* [25] und *N. Bourbaki* [26]). Wegen der soeben erwähnten Isomorphie kann dies geschehen, ohne daß dabei zu befürchten ist, daß Widersprüche auftreten.

Es ist aber irreführend, zu sagen, daß die Elemente von K Zahlen, also Elemente von Ω *sind;* vielmehr sind die Elemente von K die Klassen $[\alpha a_0, \beta a_0]$, also Klassen von Paaren von V-Elementen. Hierher gehört auch, daß es üblich ist, das Einselement von $\mathfrak{G}$, also $[a_0, a_0]$, mit der Zahl 1 zu identifizieren. Es sei noch angemerkt, daß dieses Element *idempotent* ist, d. h., daß jede Potenz dieses Elementes gleich dem Element selbst ist.

Es werde die Abbildung

$$f([a_0^\mu, a_0^\nu]) = A^\lambda, \qquad \lambda = \mu - \nu \tag{7.2}$$

betrachtet. Durch sie werden die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ auf die Menge der A^λ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ abgebildet.

Wird die Menge der Bilder A^λ mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnet, so gilt der folgende

Satz 3. Die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ bilden eine unendliche zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element A, die isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ ist.

In der Tat, die Abbildung (7.2) ist umkehrbar eindeutig, denn zwei Elemente $[a_0^\mu, a_0^\nu]$ und $[a_0^{\mu'}, a_0^{\nu'}]$ von $\mathfrak{G}_0$ sind gleich, wenn $\mu - \nu = \mu' - \nu'$ ist. Ferner ist das Bild des Produktes zweier Elemente von $\mathfrak{G}_0$ gleich dem Produkt der Bilder der Faktoren,

$$f([a_0^\mu; a_0^\nu][a_0^{\mu'}, a_0^{\nu'}]) = f([a_0^{\mu+\mu'}, a_0^{\nu+\nu'}]) = A^\lambda A^{\lambda'}$$

mit $\lambda = \mu - \nu$, $\lambda' = \mu' - \nu'$. Daß die Elemente A^λ (λ ganze Zahl) eine unendliche zyklische Gruppe bilden, kann unmittelbar abgelesen werden.

Es sei noch angemerkt, daß das erzeugende Element A das Bild von $[a_0^2, a_0] \in \mathfrak{G}_0$ ist, das neutrale Element A^0 das Bild von $[a_0, a_0] \in \mathfrak{G}_0$.

Aus Satz 2 des § 6 und dem soeben bewiesenen folgt unmittelbar der

Satz 4. Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, das sind die Klassen von $\mathfrak{G}$, bilden eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe.

Wie oben gezeigt wurde, bilden die Elemente einer Klasse von $\mathfrak{G}$ einen Vektorraum. Somit ergibt sich aus dem vorstehenden Satz, daß zwei V-Elemente genau dann das gleiche Bild in $\mathfrak{G}_0$ haben, wenn sie demselben Vektorraum angehören.

Erwähnt sei noch, daß auf Grund der bisherigen Ergebnisse eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe unter Benutzung des Begriffes des *Produktes zweier Gruppen* gewonnen werden kann. Der eine Faktor ist dabei die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von Ω, der andere die unendliche zyklische Gruppe mit den Elementen a_0^λ $(\lambda = 0, \pm 1, \ldots)$ (vgl. hierzu *R. Fleischmann* [27] sowie die Bemerkung zu Anfang des § 6).

In der Physik ist es üblich, von dem Element $[\alpha a_0^\mu, \beta a_0^\nu) \in \mathfrak{G}$ zu sagen, daß es die „Dimension A^λ“ hat $(\lambda = \mu - \nu)$, mit anderen Worten, das in $\mathfrak{G}_0$ gelegene Bild des betreffenden Elementes wird „Dimension“ dieses V-Elementes genannt. In diesem Sinne bilden die Dimensionen eine unendliche zyklische Gruppe mit dem erzeugenden Element A. Zwei V-Elemente haben somit genau dann die gleiche „Dimension“, wenn sie demselben Vektorraum angehören. Da die Elemente eines Vektorraumes einen Modul bilden, können

„gleichdimensionale“ V-Elemente addiert werden. Damit ist eine Eigenschaft des Kalküls beschrieben, die bei der Anwendung desselben besonders zu beachten ist. Nähere Einzelheiten hierzu werden am Schluß des folgenden Paragraphen erläutert.

§ 8. Anwendung auf die Geometrie

Länge, Flächen- und Rauminhalt sind Begriffe, die der Geometrie angehören. Zur Darstellung von Längen, Flächen- und Rauminhalten werden V-Elemente benutzt. Der Vektorraum A der Längen sei Erzeugende eines freien Systems vom Rang 1. Dann sind die Vektorräume A, A^2, $A^3, \ldots$ disjunkt. Als Basis von A sei $a_0 = 1$ Meter gewählt. Dann kann als Basis von A^2, also des Vektorraumes der Flächeninhalte, $a_0^2 = 1$ Meterquadrat genommen werden, als Basis von A^3, also des Vektorraumes der Rauminhalte, $a_0^3 =$ 1 Meterkubus. Die Vektorräume A^4, $A^5, \ldots$ mögen hier außer Betracht bleiben.

Außer den soeben erwähnten Begriffen interessieren hier noch die Begriffe „ebener Winkel“ und „räumlicher Winkel“.

Wird der ebene Winkel im Bogenmaß gemessen, so ergibt sich als Maß desselben der Quotient zweier Längen, nämlich die Länge des von dem betreffenden Winkel aus einem Kreis (um seinen Scheitel) ausgeschnittenen Kreisbogens dividiert durch den Kreisradius.

Ist αa_0 die (in Metern gemessene) Länge des ausgeschnittenen Bogens, βa_0 die (in Metern gemessene) Länge des Radius des Kreises, so wird der „ebene Winkel“ durch das V-Element

$$[\alpha a_0, \beta a_0] \in K$$

dargestellt.

Die „ebene Winkel“ darstellenden V-Elemente bilden, wie oben dargelegt wurde, einen eindimensionalen Vektorraum; als Basis dieses Vektorraumes kann die Klasse $[a_0, a_0]$ genommen werden. Bei Betrachtungen über ebene Winkel geben die Physiker der Basis $[a_0, a_0]$ den Namen 1 rad (Radiant).

Zwei Winkel $[\alpha a_0, \beta a_0]$ und $[\alpha' a_0, \beta' a_0]$ sind genau dann einander gleich, wenn

$$(\alpha a_0, \beta a_0) \equiv (\alpha' a_0, \beta' a_0) \pmod{R_2}$$

d. h., wenn

$$\alpha\beta' = \alpha'\beta.$$

Ein „räumlicher Winkel“ kann dargestellt werden als der Quotient zweier Flächeninhalte, nämlich dem Inhalt des Flächenstückes, das der betreffende Raumwinkel auf einer Kugelfläche (um seinen Scheitel) ausschneidet, dividiert durch das Quadrat des Radius der Kugelfläche.

Ist αa_0^2 der in Meterquadraten gemessene Inhalt des ausgeschnittenen Flächenstückes, βa_0 der in Metern gemessene Radius der Kugelfläche, so wird der räumliche Winkel durch das V-Element

$$[\alpha a_0^2, \beta^2 a_0^2] \in K$$

dargestellt.

Nun sind aber die Klassen $[\alpha a_0, \beta a_0]$ und $[\alpha a_0^2, \beta^2 a_0^2]$ R_3-äquivalent und gehören somit ein und demselben Vektorraum, nämlich K an, als dessen Basis oben schon $[a_0, a_0]$ gewählt wurde.

Bei Betrachtungen über „räumliche Winkel" geben die Physiker der Basis $[a_0, a_0]$ den Namen 1 sr (Steradiant). Dies zeigt an, daß die verschiedenen Benennungen für ein und dieselbe Basis von einem „Sachbezug" herrühren, den der Kalkül ignoriert. Der Kalkül kennt keinen Unterschied zwischen „Radiant" und „Steradiant". V-Elemente, die entweder Quotient zweier Längen oder zweier Flächeninhalte oder zweier Rauminhalte sind, sind ausnahmslos Elemente des Vektorraumes K, von welchem $[a_0, a_0]$ eine Basis ist.

In diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, daß das V-Element „ebener Winkel" auch als Quotient zweier Flächeninhalte definiert werden kann, nämlich als doppelter Inhalt des Sektors, der von dem betreffenden Winkel aus einem Kreis (um seinen Scheitel) ausgeschnitten wird, dividiert durch den Flächeninhalt des Quadrates, dessen Seitenlänge gleich dem Radius des Kreises ist. Dies führt auf die Klasse $[\alpha\beta a_0^2, \beta^2 a_0^2]$, also dieselbe Klasse wie $[\alpha a_0, \beta a_0]$. Dies zeigt an, daß der Namengebung bei Radiant und Steradiant eine gewisse Willkür anhaftet. Dies geht auch daraus hervor, daß man gewisse V-Elemente aus K, wie z. B. die Dehnung und den Sinus eines Winkels im Gegensatz zu Radiant und Steradiant mit keinem besonderen Namen belegt hat.

Wie oben in § 7 (Satz 2) gezeigt wurde, ist der Körper K isomorph zu dem Körper Ω, und es können daher die Elemente von K mit den entsprechenden Elementen von Ω identifiziert werden. Danach kann beispielsweise jeder ebene oder räumliche Winkel mit einer Zahl identifiziert werden, allgemein jeder Quotient zweier Längen, zweier Flächeninhalte, zweier Rauminhalte. Da V-Elemente desselben Vektorraumes addiert werden können, kann ein zu einem ebenen Winkel gehörendes V-Element mit einem zu einem räumlichen Winkel gehörenden V-Element additiv verknüpft werden. Über Funktionen von Elementen des Körpers K wird in § 13 näheres ausgeführt.

Die Elemente von K werden in der Physik als „dimensionslose Größen" bezeichnet, auch als „Größen von der Dimension von 1". Die erste Bezeichnung will besagen, daß diese V-Elemente von der Dimension A^0 sind, die zweite, daß jedes solche V-Element mit einer Zahl identifiziert werden kann. Es kann nämlich $[\alpha a_0, \beta a_0]$ durch die Zahl α/β ersetzt werden, ohne daß das Ergebnis der Rechnung beeinflußt wird, da, wie oben gezeigt wurde, der Körper K isomorph zu dem Körper Ω ist.

Gelegentlich begegnet man der Auffassung, daß man ebenso wie aus den Elementen des Vektorraumes A auch aus den Elementen von K (sie bilden nach Satz 1 des § 7 einen Vektorraum) zunächst zu einer der in § 4 betrachteten Semigruppe $\mathfrak{S}$ entsprechenden Semigruppe gelangen könne und von da aus (durch Symmetrisieren) zu einer Gruppe. Dies ist aber nicht möglich, da das Produkt zweier Elemente von K wieder ein Element von K liefert, also ein Element desselben Vektorraumes, während das Produkt zweier Elemente von A einem von A verschiedenen Vektorraum angehört, nämlich dem oben mit A^2 bezeichneten. Jedes Produkt aus endlich vielen Elementen von K ist wieder ein Element von K. Der Vektorraum K kann also im Gegensatz zu dem Vektorraum A *nicht* Erzeugende eines freien Systems vom Rang 1 sein.

Schließlich sei noch daran erinnert (vgl. § 3), daß in der einschlägigen physikalischen Literatur die Erzeugenden eines freien Systems als „Basisgrößenarten", auch „Ausgangsgrößenarten", bezeichnet werden. Danach kann weder der ebene noch der räumliche Winkel „Ausgangsgröße" sein.

§ 9. Freie Systeme mit mehreren Erzeugenden

Im folgenden wird an die Betrachtungen am Schluß des § 3 angeknüpft, und es werden die für Systeme mit *einer* Erzeugenden in den § 4 bis 7 mitgeteilten Ergebnisse auf solche mit *mehreren* Erzeugenden verallgemeinert. Da hierbei die Betrachtungen ähnlich denen der soeben erwähnten Paragraphen verlaufen, sind die nachstehenden Ausführungen etwas knapper gehalten.

Ist $A, B, \ldots, L$ ein *freies System* vom Rang ϱ, dann besteht die Menge

$$\mathfrak{N} = \{ A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda \} \qquad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda \text{ natürliche Zahlen})$$

aus paarweise disjunkten Vektorräumen, die aus den ϱ Vektorräumen $A, B, \ldots, L$ erzeugt werden. Das allgemeine Element des Vektorraumes $A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$ ist $\xi \alpha_0{}^\alpha b_0{}^\beta \ldots l_0{}^\lambda$ mit $\xi \in \Omega$. Die aus sämtlichen Elementen der in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Vektorräume gebildete Vereinigungsmenge ist, wie schon in § 3 gezeigt wurde, eine *kommutative Halbgruppe*.

Das allgemeine Element der in § 4 eingeführten Menge $\mathfrak{S}$ ist

$$x = \xi a_0{}^\alpha b_0{}^\beta \ldots l_0{}^\lambda \text{ mit } \xi \neq 0,$$

denn bei der Bildung von $\mathfrak{S}$ wird in jedem der zu $\mathfrak{N}$ gehörenden Vektorräume das Nullelement unterdrückt. Wie in § 4 gilt auch hier der

Satz 1. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind regulär und bilden infolgedessen eine kommutative Semigruppe.

Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 1 des § 4. Sind $u, x, x' \in \mathfrak{S}$ und gilt $ux = ux'$ so ist zu zeigen, daß aus der letzten Gleichung

$$x = x'$$

folgt. Wenn nämlich die auf beiden Seiten der Gleichung $ux = ux'$ stehenden Elemente von $\mathfrak{S}$ gleich sein sollen, müssen sie Elemente desselben Vektorraumes sein, woraus zunächst $x \equiv x' \pmod{R_1}$ folgt. Außerdem müssen x und x' in bezug auf irgendeine Basis des Vektorraumes, dem sie beide angehören, die gleiche Koordinate haben, da u kein Nullelement sein kann. Somit ist $x = x'$; die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind daher regulär und $\mathfrak{S}$ ist infolgedessen eine kommutative Semigruppe.

Was die *Division* anbetrifft, so ist sie in $\mathfrak{S}$ nur unter einschränkenden Bedingungen möglich. Die Division, d. h. die Auflösung der Gleichung

$$ux = u'$$

durch ein Element $x \in \mathfrak{S}$ ist nur dann möglich, wenn für $u \in A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$ und $u' \in A^{\alpha'} B^{\beta'} \ldots L^{\lambda'}$ die ϱ Bedingungen

$$\alpha < \alpha', \beta < \beta', \ldots, \lambda < \lambda'$$

erfüllt sind. Ist auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so ist die Division in $\mathfrak{S}$ nicht ausführbar. Dies folgt in ähnlicher Weise wie in § 4.

Ebenso wie bei den freien Systemen mit einer Erzeugenden handelt es sich jetzt darum, die Semigruppe $\mathfrak{S}$ in eine Gruppe einzubetten, denn in einer Gruppe ist die Division uneingeschränkt und eindeutig ausführbar, da jedes Element der Gruppe ein inverses besitzt. Der Vorgang der Einbettung einer Semigruppe $\mathfrak{S}$ in eine Gruppe $\mathfrak{G}$ wurde schon in § 5 beschrieben. Die dort mitgeteilten Ergebnisse bleiben unverändert bestehen, gleichgültig, welches der Rang des freien Systems sein mag. Es gilt also der

Satz 2. Die Klassen von Paaren von V-Elementen, d. h. die Elemente der Quotientenmenge $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$, *bilden bezüglich der Verknüpfung (M) eine Abelsche Gruppe.*

Wird das allgemeine Element von $\mathfrak{G}$ durch

$$x = [\xi a_0^{\alpha} b_0^{\beta} \ldots l_0^{\lambda}, \xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'}]$$

dargestellt, so ist das Einselement von $\mathfrak{G}$ die Klasse

$[a_0 b_0 \ldots l_0, a_0 b_0 \ldots l_0]$; das zu x inverse Element ist die Klasse

$[\xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'}, \xi a_0^{\alpha} b_0^{\beta} \ldots l_0^{\lambda}]$.

Satz 2 des § 5 kann unmittelbar übernommen werden. Er lautet:

Satz 3. Die Semigruppe $\mathfrak{S}$ *ist isomorph zu einer echten Teilmenge von* $\mathfrak{G}$.

Werden die Elemente der Quotientenmenge $(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})/R_2$ als verallgemeinerte V-Elemente angesehen, so bleibt auch Satz 3 des § 5 unverändert bestehen. Es gilt also auch bei Systemen mit mehreren Erzeugenden der

Satz 4. Die von Null verschiedenen (verallgemeinerten) V-Elemente, welche durch die Multiplikationsvorschrift (M) verknüpft sind, bilden eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$.

An die Stelle der in § 6 beschriebenen Abbildung der Elemente von $\mathfrak{G}$ tritt hier die folgende:

$$f([\xi a_0^{\alpha} b_0^{\beta} \ldots l_0^{\lambda}, \xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'}]) = [a_0^{\alpha} b_0^{\beta} \ldots l_0^{\lambda}, a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} \ldots l_0^{\lambda'}]. \quad (9.1)$$

Durch die Abbildung (9.1) werden die Elemente von $\mathfrak{G}$ in disjunkte Klassen eingeteilt. Zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, welche dasselbe Bild haben, werden derselben Klasse zugeordnet und R_3-äquivalent genannt. Zwei Bilder $[a_0^{\alpha} \ldots l_0^{\lambda}, a_0^{\alpha'} \ldots l_0^{\lambda'}]$ und $[a_0^{\alpha_1} \ldots l_0^{\lambda_1}, a_0^{\alpha_1'} \ldots l_0^{\lambda_1'}]$ sind aber gleich, wenn die entsprechenden Paare R_2-äquivalent sind, d. h., wenn die ϱ Bedingungen

$$\alpha - \alpha' = \alpha_1 - \alpha_1', \ldots, \lambda - \lambda' = \lambda_1 - \lambda_1' \quad (R_3)$$

bestehen. Das ist die *Äquivalenzrelation*, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ derselben Klasse angehören. Diese Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

In bezug auf die in $\mathfrak{G}$ gültige multiplikative Verknüpfung stellt die Abbildung (9.1) einen *Homomorphismus* dar. Dies kann in entsprechender Weise wie bei dem Beweis des Satzes 1 aus § 6 gezeigt werden und führt zu dem

Satz 5. Die Bilder der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ *bilden eine zu* $\mathfrak{G}$ *homomorphe Gruppe* $\mathfrak{G}_0$, *die eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist.*

Das allgemeine Element von $\mathfrak{G}_0$ ist die Klasse $[a_0^{\alpha}\ldots l_0^{\lambda},\ a_0^{\alpha'}\ldots l_0^{\lambda'}]$ ($\alpha,\ldots,\lambda;\ \alpha',\ldots,\lambda'$ sind dabei natürliche Zahlen); das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$ ist die Klasse $[a_0\ldots l_0,\ a_0\ldots l_0]$, das zum allgemeinen Element inverse ist $[a_0^{\alpha'}\ldots l_0^{\lambda'},\ a_0^{\alpha}\ldots l_0^{\lambda}]$.

Satz 2 des § 6 kann ebenfalls unmittelbar übernommen werden. Es gilt also

Satz 6. Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{G}/R_3$, das sind die Klassen von $\mathfrak{G}$, bilden eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe. $\mathfrak{G}/R_3$ wird Quotientengruppe von $\mathfrak{G}$ in bezug auf (R_3) genannt.

Die in $\mathfrak{G}$ enthaltenen eine Sonderstellung einnehmenden Klassen $[\xi a_0\ldots l_0,\ \xi' a_0\ldots l_0]$ haben als Bild die Klasse $[a_0\ldots l_0,\ a_0\ldots l_0]$, das ist das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$. Wie in § 6 (Satz 3) gilt auch hier der

Satz 7. Ist $\mathfrak{G}_0$ eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe, dann bilden diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Bild das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$ ist, einen Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$.

In entsprechender Weise wie in § 6 kann auch hier gezeigt werden, daß die durch die homomorphe Abbildung (9.1) definierte Äquivalenzrelation (R_3) gleichwertig mit

$$x^{-1}x' \in \mathfrak{H} \qquad\qquad (x,\ x' \in \mathfrak{G})$$

ist, und daß infolgedessen die Quotientenmenge $\mathfrak{G}/R_3$ auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ geschrieben werden kann. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe und damit zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Gruppe und wird *Quotientengruppe* (Faktorgruppe) genannt.

Daß die Elemente einer Klasse von $\mathfrak{G}$ einen eindimensionalen Vektorraum bilden, wird in entsprechender Weise wie im § 7 nachgewiesen.

Schließlich gilt, ebenso wie in § 7 (Satz 2), auch hier der

Satz 8. Wird zu den Elementen des Normalteilers $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ noch das Nullelement $(0\cdot a_0b_0\ldots l_0,\ a_0b_0\ldots l_0]$ hinzugefügt, so ergibt sich ein Körper K, der isomorph zu dem Körper Ω ist.

Danach kann jedes Element von K mit einer Zahl, also einem Element von Ω, „identifiziert" werden. Die Elemente selbst sind aber keine Zahlen, sondern die Klassen $[\xi a_0b_0\ldots l_0,\ \xi' a_0b_0\ldots l_0]$.

An die Stelle der Abbildung (7.2) des § 7 tritt hier die Abbildung

$$f\,([a_0^{\alpha'}b_0^{\beta'}\ldots l_0^{\lambda'},\ a_0^{\alpha''}b_0^{\beta''}\ldots l_0^{\lambda''}]) = A^{\alpha}\,B^{\beta}\ldots L^{\lambda} \tag{9.2}$$

mit $\alpha = \alpha' - \alpha''$, $\beta = \beta' - \beta''$, $\ldots$, $\lambda = \lambda' - \lambda''$.

Durch (9.2) werden die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ auf die Menge

$$\{\, A^{\alpha}\,B^{\beta}\ldots L^{\lambda} \,\}$$

abgebildet, wobei jeder der Exponenten $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ für sich sämtliche ganzen Zahlen durchläuft. Wird die Menge der Bilder $\{\, A^{\alpha}\,B^{\beta}\ldots L^{\lambda} \,\}$ mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnet, so gilt der folgende dem Satz 3 des § 7 entsprechende

Satz 9. Die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ bilden eine unendliche freie Abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $A, B, \ldots, L$, die isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ ist.

Die Isomorphie der beiden Gruppen wird in entsprechender Weise wie in Satz 3 des § 7 nachgewiesen. Da die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ paarweise disjunkte Vektorräume sind, ist $\mathfrak{G}_0$ eine freie Abelsche Gruppe mit den Erzeugenden A, $B \ldots, L$.

Die unendliche freie Abelsche Gruppe tritt hier als Verallgemeinerung der in § 7 erwähnten unendlichen zyklischen Gruppe auf. Das allgemeine Element von $\mathfrak{G}_0$ ist

$$X = A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda,$$

wo $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ jedes ϱ-tupel von ganzen Zahlen sein kann. Das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$, also das Bild von $[a_0 b_0 \ldots l_0, a_0 b_0 \ldots l_0]$ ist $A^0 B^0 \ldots L^0$.

Auch der Satz des § 7 kann unmittelbar übernommen werden.

Satz 10. Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, das sind die Klassen der R_3-äquivalenten Elemente von $\mathfrak{G}$, bilden eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe.

Schließlich sei noch bemerkt, daß es in der Physik üblich ist, von dem Element $[\xi' a_0^{\alpha'} \ldots l_0^{\lambda'}, \xi'' a_0^{\alpha''} \ldots l_0^{\lambda''}] \in \mathfrak{G}$ zu sagen, daß es die Dimension $A^\alpha \ldots L^\lambda$ habe, wobei

$$\alpha = \alpha' - \alpha'', \ldots, \lambda = \lambda' - \lambda''.$$

Demnach wird in der Physik das in $\mathfrak{G}_0$ gelegene Bild eines V-Elementes als seine „Dimension“ bezeichnet. Daraus ergibt sich, daß zwei V-Elemente, welche die „gleiche Dimension“ haben, demselben Vektorraum angehören und infolgedessen addiert werden können. Diese Eigenschaften werden in § 12 an Beispielen erläutert.

Weiter geht aus Satz 9 hervor, daß die „physikalischen Dimensionen“ eine unendliche freie Abelsche Gruppe bilden. Dies wurde wohl erstmals von *R. Fleischmann* [9] ausgesprochen.

§ 10. Additive Darstellung einer unendlichen freien Abelschen Gruppe

Es wird die soeben eingeführte unendliche freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_0$ betrachtet, deren allgemeines Element sich mit einer leichten Bezeichnungsänderung schreiben läßt

$$X = \prod_{\mu=1}^{\varrho} A_\mu^{\alpha_\mu}.$$

Die Elemente $A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ sind die Erzeugenden von $\mathfrak{G}_0$, die Exponenten α_μ sind ganze Zahlen. Bei festgehaltenen Erzeugenden kann jedem Element $X \in \mathfrak{G}_0$ ein ϱ-tupel von ganzen Zahlen zugeordnet werden, nämlich

$$\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho).$$

Wird ω als Bild von X gedeutet,

$$\omega = \varphi(X), \tag{10.1}$$

und bedeutet Γ die Menge der ϱ-tupel ω von ganzen Zahlen, so ist die hierdurch beschriebene Abbildung der Mengen $\mathfrak{G}_0$ und Γ umkehrbar eindeutig. Jedes Element X von $\mathfrak{G}_0$ wird auf genau ein ϱ-tupel $\omega \in \Gamma$ von ganzen Zahlen abgebildet und umgekehrt. So wird beispielsweise das Element $A_1^1 A_2^0 \ldots A_\varrho^0$ auf das ϱ-tupel $(1,0,\ldots,0)$ abgebildet.

Satz. Die Menge Γ der ϱ-tupel ω von ganzen Zahlen bildet eine unendliche freie additive Abelsche Gruppe (Modul), die isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ ist.

Beweis. Der multiplikativen Verknüpfung im Original $\mathfrak{G}_0$ entspreche die additive Verknüpfung im Bild Γ. Sind X und X' zwei Elemente von $\mathfrak{G}_0$, so ist ihr Produkt $XX' = X''$ ebenfalls Element von $\mathfrak{G}_0$. Sind ω, ω', ω'' die Bilder von X, X', X'', so ist das Bild des Produktes XX' das ϱ-tupel

$$\omega + \omega' = \omega''.$$

Wegen $\omega = \varphi(X)$ folgt hieraus

$$\varphi(X) + \varphi(X') = \varphi(X'') = \varphi(XX'),$$

d. h., daß die Summe der Bilder gleich dem Bild des Produktes der Originale ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{G}_0$ und Γ isomorph sind.

Dem neutralen Element von $\mathfrak{G}_0$ entspricht das ϱ-tupel $(0,0,\ldots,0)$. Ist ω das Bild von X, dann besitzt X^{-1} das Bild $-\omega$. Sind $\omega_1,\ldots,\omega_\varrho$ die Bilder der Erzeugenden $A_1,\ldots,A_\varrho$ von $\mathfrak{G}_0$, also $\omega_\mu = \varphi(A_\mu)$, so ist

$$\varphi(X) = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \varphi(A_\mu)\,,$$

also

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \omega_\mu$$

das Bild von $X = \prod_{\mu=1}^{\varrho} A_\mu^{\alpha_\mu}$

Da ω_μ das ϱ-tupel ist, dessen Koordinaten mit Ausnahme der μ-ten, die den Wert 1 besitzt, sämtlich den Wert Null haben, besteht das System $\omega_1,\ldots,\omega_\varrho$ aus ϱ linear unabhängigen ϱ-tupeln.

Daraus folgt der

Satz. Bilden die Elemente $A_1,\ldots,A_\varrho$ eine Basis von $\mathfrak{G}_0$, dann sind ihre Bilder $\omega_1,\ldots,\omega_\varrho$ linear unabhängig und bilden eine Basis des Moduls Γ. Jedes Element von Γ läßt sich durch

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \omega_\mu \tag{10.2}$$

darstellen.

Die Elemente des Moduls Γ können geometrisch als Punkte eines in einem ϱ-dimensionalen euklidischen Raum eingebetteten *Gitters* gedeutet werden. Ein einzelner Gitterpunkt wird dadurch erhalten, daß der Nullpunkt des ϱ-dimensionalen Raumes um ein ganzzahliges Vielfaches α_1 von ω_1 verschoben wird, sodann um ein ganzzahliges Vielfaches α_2 von ω_2 usw. Jedem Element von Γ ist genau ein Gitterpunkt zugeordnet und umgekehrt. Jeder zu einem Gitterpunkt hinführende Vektor ω läßt sich durch (10.2) darstellen. Auf Grund des umkehrbar eindeutigen Zusammenhanges zwischen einem Modul Γ und dem ihm zugehörigen Gitter, wird im folgenden gelegentlich auch kurz vom „Gitter Γ" gesprochen werden.

§ 11. Wechsel der Basis, unimodulare Matrix

Die folgenden Betrachtungen werden an dem Modul Γ durchgeführt. Wegen der Isomorphie von $\mathfrak{G}_0$ und Γ können die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse unmittelbar von Γ auf $\mathfrak{G}_0$ übertragen werden.

Es sei $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ eine Basis von Γ. Dann kann jedes Element ω von Γ auf genau eine Weise durch

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \omega_\mu \tag{11.1}$$

dargestellt werden, wobei die α_μ ganze Zahlen sind.

$\omega_1', \ldots, \omega_\varrho'$ sei ebenfalls eine Basis von Γ. Gemäß (11.1) kann dann jedes Element der zweiten Basis als lineare Komposition der Elemente der ersten Basis dargestellt werden,

$$\omega_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\nu\mu} \omega_\mu, \qquad \nu = 1, \ldots, \varrho, \tag{11.2}$$

wobei die $\alpha_{\nu\mu}$ ganze Zahlen sind. Die ϱ-tupel $(\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu\varrho})$ sind die Koordinaten der ω_ν'. Da nach Voraussetzung die ω_ν' eine Basis bilden, also linear unabhängig sind, sind auch die entsprechenden ϱ-tupel linear unabhängig. Infolgedessen ist die Matrix $(\alpha_{\nu\mu})$ regulär. Ebenso kann jedes Element ω_μ der ersten Basis als lineare Komposition der Elemente der zweiten Basis dargestellt werden,

$$\omega_\mu = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_{\mu\nu}' \omega_\nu', \qquad \mu = 1, \ldots, \varrho, \tag{11.3}$$

wo die $\alpha_{\mu\nu}'$ ebenfalls ganze Zahlen sind. Auch die Matrix $(\alpha_{\mu\nu}')$ ist regulär. Durch Einsetzen von (11.2) in $\omega = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_\nu' \omega_\nu'$ folgt

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_\nu' \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\nu\mu} \omega_\mu = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \Big(\sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_{\nu\mu} \alpha_\nu' \Big) \omega_\mu .$$

Andererseits gilt $\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \omega_\mu$. Da die ω_μ linear unabhängig sind, ergibt sich aus den beiden letzten Darstellungen von ω

$$\alpha_\mu = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_{\nu\mu} \alpha_\nu', \qquad \mu = 1, \ldots, \varrho. \tag{11.4}$$

In entsprechender Weise folgt durch Einsetzen von (11.3) in

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \omega_\mu$$

$$\alpha_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\mu\nu}' \alpha_\mu, \qquad \nu = 1, \ldots, \varrho . \tag{11.5}$$

Danach sind die beiden Matrizen $(\alpha_{\nu\mu})$ und $(\alpha_{\mu\nu}')$ invers. Wird $(\alpha_{\nu\mu}) = \boldsymbol{A}$ geschrieben, so ist demnach $(\alpha_{\mu\nu}') = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Wegen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ Einheitsmatrix) folgt

$$\det \boldsymbol{A} \ \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E} = 1.$$

Da die Elemente der beiden Matrizen A und A^{-1} ganze Zahlen sind, sind ihre Determinanten ebenfalls ganze Zahlen. Dann kann aber das Produkt der beiden Determinanten nur dann den Wert 1 haben, wenn entweder beide Determinanten den Wert 1 oder beide den Wert -1 haben.

In der Algebra ist es gebräuchlich, eine quadratische Matrix mit ganzzahligen Elementen, deren Determinante den Wert 1 oder -1 hat, *unimodular* zu nennen. Mit A ist auch A^{-1} unimodular. Damit ist folgendes gezeigt: Sind $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ und $\omega_1', \ldots, \omega_\varrho'$ zwei Basen des Moduls Γ, so ist die durch (11.2) definierte Transformationsmatrix $A = (\alpha_{\nu\mu})$ unimodular. Die Unimodularität ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß $\omega_1', \ldots, \omega_\varrho'$ wieder eine Basis ist.

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend*, d. h., wenn $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ eine Basis des Moduls Γ und $A = (\alpha_{\nu\mu})$ eine unimodulare Matrix ist, dann bilden die durch (11.2) definierten ϱ-tupel $\omega_1', \ldots, \omega_\varrho'$ wieder eine Basis von Γ.

In der Tat, wegen $\det A \neq 0$ sind die ω_ν' linear unabhängig, da die ω_μ es sind. Dann kann aber jedes Element ω von Γ durch eine lineare Komposition der ω_ν' dargestellt werden,

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_\nu' \, \omega_\nu'$$

und in dieser sind die α_ν' ganze Zahlen. Dies ergibt sich in folgender Weise: Aus (11.1), wo die α_μ ganze Zahlen sind, und aus (11.3), wo die $\alpha_{\mu\nu}'$ wegen der Unimodularität von A^{-1} ebenfalls ganze Zahlen sind, folgt

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \, \omega_\mu = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \left(\sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_{\mu\nu}' \, \omega_\nu' \right) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \left(\sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_\mu \, \alpha_{\mu\nu}' \right) \omega_\nu' = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \alpha_\nu' \, \omega_\nu' .$$

Also sind auch α_ν' ganze Zahlen. Damit ist bewiesen der

Satz. Ist $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ eine Basis des Moduls Γ, dann ist $\omega_1', \ldots, \omega_\varrho'$ genau dann wieder eine Basis, wenn die in

$$\omega_\nu' = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\nu\mu} \, \omega_\mu , \qquad \nu = 1, \ldots, \varrho$$

auftretende Matrix $A = (\alpha_{\nu\mu})$ unimodular ist.

Die Gleichungen (11.4) und (11.5) beschreiben, wie sich die ganzzahligen Koordinaten eines Gitterpunktes bei einem Wechsel der Basis ändern. Die in (11.4) auftretende Matrix ist die Transponierte von A, die in (11.5) die Transponierte von A^{-1}.

Es sei A irgend eine unimodulare Matrix. Dann wird durch

$$\omega' = A\omega$$

jedem $\omega \in \Gamma$ ein Element $\omega' \in \Gamma$ zugeordnet. Da ω ein ϱ-tupel von ganzen Zahlen und A unimodular ist, enthält das ϱ-tupel ω' nur ganze Zahlen. Ist umgekehrt ω' ein beliebiges Element von Γ, so gibt es zu ihm genau ein Original $\omega \in \Gamma$ mit $A\omega = \omega'$. Dieses Original ist offensichtlich $\omega = A^{-1}\omega'$. Also wird durch A eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Moduls Γ auf sich selbst beschrieben.

Diese Abbildung ist sogar isomorph, denn für $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma$ gilt

$$\boldsymbol{A}(\omega_1 + \omega_2) = \boldsymbol{A}\omega_1 + \boldsymbol{A}\omega_2 = \omega_1' + \omega_2',$$

d. h., das Bild der Summe ist gleich der Summe der Bilder. Damit ist bewiesen der

Satz. Durch $\omega' = \boldsymbol{A}\omega$, wo $\boldsymbol{A}$ eine unimodulare Matrix ist, wird ein Isomorphismus des Moduls Γ auf sich selbst, also ein Automorphismus, beschrieben.

Es gibt unendlich viele verschiedene Basen. In der Tat, die spezielle Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1\varrho} \\ 0, & 1, & \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2\varrho}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, \quad 1 \end{pmatrix},$$

in welcher die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente den Wert 1 haben, während die rechts von der Hauptdiagonale stehenden Elemente irgendwelche ganze Zahlen sind, ist unimodular. Damit ist eine unendliche Teilmenge der unimodularen Matrizen angegeben.

Satz. Die unimodularen Matrizen bilden eine Gruppe.

Werden nämlich zwei unimodulare Matrizen miteinander multipliziert, so entsteht wieder eine unimodulare Matrix, denn die Determinante eines Produktes zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten der Faktoren, hat also bei unimodularen Matrizen wieder den Wert 1 oder -1. Das assoziative Gesetz gilt ohnehin bei der Multiplikation von Matrizen; das neutrale Element, d. i. die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$, und das zu einer unimodularen Matrix $\boldsymbol{A}$ inverse Element $\boldsymbol{A}^{-1}$ sind, wie oben schon festgestellt wurde, unimodular.

Es sei noch bemerkt, daß die Transponierte einer unimodularen Matrix unimodular ist, ebenso die Adjungierte einer unimodularen Matrix und die symmetrische Matrix, die durch Multiplikation einer unimodularen Matrix mit ihrer Transponierten entsteht.

Wegen einer ausführlichen Darstellung der Theorie der unimodularen Transformationen sei auf *A. Chatelet* [28] verwiesen.

§ 12. Anwendung auf die Mechanik

In der klassischen Mechanik bedient man sich bei der Darstellung der Größen vielfach des sogenannten CGS-Systems. In der Sprache der Algebra ausgedrückt, also bei Benutzung von V-Elementen an Stelle von Größen, heißt dies, daß man den Betrachtungen das freie System von eindimensionalen Vektorräumen zugrunde legt, deren Elemente die in Zentimeter gemessenen Längen, die in Gramm gemessenen Massen und die in Sekunden gemessenen Zeiten sind. Zentimeter fungiert dabei als Basis des ersten Vektorraumes, Gramm als Basis des zweiten, Sekunde als Basis des dritten.

In Anwendung der oben entwickelten Theorie auf die Mechanik (unter Ausschluß der Gravitationstheorie) seien diese eindimensionalen Vektorräume mit A, B, C bezeichnet, d. h., A, B, C seien die Erzeugenden des freien Systems. Die zugehörigen Basen seien a_0, b_0, c_0 (Zentimeter, Gramm, Sekunde). Die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, also die von Null verschiedenen verallgemeinerten V-Elemente, sind die durch

$$[\xi a_0^{\alpha} b_0^{\beta} c_0^{\gamma}, \xi' a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} c_0^{\gamma'}], \qquad \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \text{ natürliche Zahlen, } \xi \xi' \neq 0$$

dargestellten Klassen. So stellt beispielsweise

$[\xi a_0^2 b_0^2 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0^3]$ eine *Kraft* dar, $[\xi a_0^3 b_0^2 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0^3]$ eine *Energie*.

Die Elemente der zu $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ sind die Klassen

$$[a_0^{\alpha} b_0^{\beta} c_0^{\gamma}, a_0^{\alpha'} b_0^{\beta'} c_0^{\gamma'}], \qquad \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \text{ natürliche Zahlen.}$$

Diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die als Bild das Einselement von $\mathfrak{G}_0$ haben — es sind dies die Klassen $[\xi a_0 b_0 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0]$ — bilden einen Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Wie in § 7 (Satz 2) gezeigt, kann durch Hinzufügen des Nullelementes $[0 \cdot a_0 b_0 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0]$ mit $\xi' \neq 0$ der Normalteiler $\mathfrak{H}$ zu einem Körper K ergänzt werden. Da K isomorph zu Ω ist, können die Elemente von K mit den Zahlen identifiziert werden, insbesondere kann das Element $[\xi a_0 b_0 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0] \in K$ mit der Zahl $\xi/\xi' \in \Omega$ identifiziert werden. Zu den Elementen von K gehören u. a. der ebene und der räumliche Winkel (vgl. auch § 8).

Daß physikalischen Begriffen verschiedener Art V-Elemente desselben Vektorraumes zugeordnet sein können, zeigt das folgende von den Begriffen *Energie* und *Drehmoment* handelnde Beispiel. Wird das Drehmoment durch die Gleichung

$$\text{Energie} = \text{Drehmoment mal Winkel}$$

definiert, so ergibt sich aus der Darstellung von Energie und Winkel durch ihre V-Elemente für das Drehmoment das V-Element

$$[\xi a_0^3 b_0^2 c_0, \xi' a_0 b_0 c_0^3].$$

Somit sind die V-Elemente Energie und Drehmoment R_3-äquivalent, denn beide haben als Bild die Klasse $[a_0^3 b_0^2 c_0, a_0 b_0 c_0^3] \in \mathfrak{G}_0$. Sie sind infolgedessen Elemente ein und desselben Vektorraumes, eine Eigenschaft, die dem Physiker unannehmbar erscheint.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung der unendlichen freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ und des Moduls Γ, weil sie Aussagen über die „Einheitensysteme" liefert, die für die Mechanik von Bedeutung sind. Die Vektorräume A, B, C sind die Erzeugenden von $\mathfrak{G}_0$. Durch die Abbildung (10.1) werden den Erzeugenden A, B, C die Zahlentripel

$$\omega_1 = (1, 0, 0), \qquad \omega_2 = (0, 1, 0), \qquad \omega_3 = (0, 0, 1)$$

zugeordnet, welche eine Basis des Moduls Γ bilden. Infolgedessen kann jedes Element $\omega \in \Gamma$ durch

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu \omega_\nu \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ ganze Zahlen})$$

dargestellt werden.

In der untenstehenden Tafel sind in der ersten Spalte für einige aus A, B, C erzeugte Vektorräume die zugeordneten Koordinatentripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ aufgeführt.

	cm α_1	g α_2	s α_3	cm α_1'	cmgs^{-2} α_2'	s α_3'
Länge	1	0	0	1	0	0
Fläche	2	0	0	2	0	0
Volumen	3	0	0	3	0	0
ebener Winkel	0	0	0	0	0	0
räumlicher Winkel	0	0	0	0	0	0
Zeit	0	0	1	0	0	1
Geschwindigkeit	1	0	− 1	1	0	− 1
Beschleunigung	1	0	− 2	1	0	− 2
Winkelgeschwindigkeit	0	0	− 1	0	0	− 1
Winkelbeschleunigung	0	0	− 2	0	0	− 2
Masse	0	1	0	− 1	1	2
Kraft	1	1	− 2	0	1	0
Energie	2	1	− 2	1	1	0
Drehmoment	2	1	− 2	1	1	0
Impuls	1	1	− 1	0	1	1
Leistung	2	1	− 3	1	1	− 1

Wird an Stelle der Basis „Länge, Masse, Zeit“ das freie System „Länge, Kraft, Zeit“ benutzt, so ist dieses System ebenfalls eine Basis des Moduls Γ. Die neuen Erzeugenden $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ ergeben sich nämlich aus den ursprünglichen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vermöge

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1 \quad , \\ \omega_2' &= \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3, \\ \omega_3' &= \omega_3. \end{aligned}$$

Die Matrix A dieses Gleichungssystems ist unimodular, wie unmittelbar abzulesen ist. Das Koordinatentripel $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ in bezug auf die Basis $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_1 - \alpha_2 \quad , \\ \alpha_2' &= \alpha_2 \quad , \\ \alpha_3' &= 2\alpha_2 + \alpha_3. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die unimodulare Matrix $(A^{-1\prime})$ (vgl. § 11).

Es sei noch erwähnt, daß beispielsweise „Länge, Energie, Zeit“ sowie „Geschwindigkeit, Impuls, Leistung“ auch eine Basis bilden, desgleichen „Länge, Masse, Geschwindigkeit“. Dagegen bilden „Länge, Masse, Beschleunigung“ keine Basis, denn die entsprechende Transformationsmatrix ist nicht unimodular, da ihre Determinante den Wert -2 hat. Von der Nennung weiterer Basen möge abgesehen werden; es sei nur daran erinnert, daß es, wie oben festgestellt wurde, unendlich viele Basen gibt.

Im folgenden sollen *Untergruppen (Untermoduln)* von Γ betrachtet werden. Von diesen interessieren hier vor allem diejenigen, die weniger als drei Erzeugende haben.

Es sei Δ eine Teilmenge von Γ. In der linearen Algebra wird gezeigt: *Ist mit $\omega' \in \Delta$, $\omega'' \in \Delta$ auch $\omega' - \omega'' \in \Delta$, dann ist Δ ein Untermodul von Γ.* Für die im folgenden angegebenen Teilmengen von Γ kann danach unmittelbar bestätigt werden, daß sie Untermoduln von Γ sind. Näheres über Untermoduln bei *A. Chatelet* [28].

a) Die Elemente

$$\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_3\omega_3 \qquad (\alpha_1, \alpha_3 \text{ ganze Zahlen})$$

bilden eine Untergruppe von Γ mit den beiden Erzeugenden ω_1, ω_3 (Vektorräume der Länge und der Zeit). Mit Hilfe der Elemente dieser Untergruppe können außer den innerhalb der Geometrie auftretenden Vektorräumen auch die der Geschwindigkeit, der Beschleunigung, der Winkelgeschwindigkeit, der Winkelbeschleunigung u. a. dargestellt werden. Dieser Untergruppe reicht für den Größenkalkül innerhalb der *Kinematik* aus.

b) Die Elemente

$$\omega = \alpha_1'\omega_1' + \alpha_2'\omega_2' \qquad (\alpha_1', \alpha_2' \text{ ganze Zahlen})$$

wobei ω_1' und ω_2' die oben angegebene Bedeutung haben, bilden eine Untergruppe von Γ. Ihre beiden Erzeugenden entsprechen den Vektorräumen der Länge und der Kraft. Mit ihrer Hilfe können außer den innerhalb der Geometrie auftretenden Vektorräumen auch die der Kraft, des Moments, der Energie u. a. dargestellt werden. Diese Untergruppe reicht für den Größenkalkül innerhalb der *Statik* aus.

c) Mit Hilfe der Untergruppe, deren Erzeugende den Vektorräumen der Energie und der Zeit entsprechen, können u. a. die folgenden Vektorräume dargestellt werden: Ebener und räumlicher Winkel, Zeit, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung, Energie, Drehmoment, Leistung. Diese Untergruppe reicht für den Größenkalkül aus, der der Beschreibung der *Mechanik der Drehbewegungen* dient.

Auf den ersten Blick erscheint es erstaunlich, daß in diesem Untermodul u. a. der „ebene Winkel" auftritt, obwohl der zu seiner Definition erforderliche Vektorraum der Länge nicht im Untermodul enthalten ist. Dieser scheinbare Widerspruch kann so erklärt werden: Ein Untermodul ist nie für sich allein zu betrachten, sondern stets als *Teil des gesamten Moduls* aufzufassen; jeder Untermodul von Γ enthält aber das Nullelement von Γ, also ist in dem in Rede stehenden Untermodul auch der „ebene Winkel" enthalten.

§ 13. Funktionen von Elementen des Körpers K

Die V-Elemente des Körpers K werden in der Physik als „dimensionslose Größen" bezeichnet. Im folgenden sollen Funktionen von Elementen aus K, also von „dimensionslosen Größen" betrachtet werden, da diese Funktionen für die Dimensionsanalysis von Bedeutung sind. Dabei mögen zunächst Polynome in einer Veränderlichen untersucht werden; bei diesen kann das Ergebnis fast unmittelbar abgelesen werden.

Es sei (vgl. § 9)

$$e = [a_0 b_0 \ldots l_0, a_0 b_0 \ldots l_0]$$

das Einselement von K. Dann kann jedes Element x von K durch

$$x = \xi e \tag{13.1}$$

dargestellt werden. Ferner sei

$$P(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu x^\mu$$

ein Polynom in x, wobei die α_μ Elemente von Ω sind. Aus (13.1) folgt $x^\mu = \xi^\mu e$, da e idempotent, d. h. $e^\mu = e$ ist (μ ganze Zahl). Es ist somit

$$P(x) = (\sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu \xi^\mu)\, e = P(\xi)\, e. \tag{13.2}$$

$P(\xi)\, e$ ist wieder ein Element von K. Wird x auf Grund von (13.1) mit $\xi \in \Omega$ identifiziert, so ist $P(x)$ nach (13.2) mit $P(\xi) \in \Omega$ zu identifizieren.

Dieses Ergebnis kann unmittelbar auf die in x rationalen Funktionen ausgedehnt werden, da sich jede solche Funktion als Quotient zweier Polynome darstellen läßt. Auch bei rationalen Funktionen von mehreren Veränderlichen bleibt es gültig. Ist beispielsweise $Q(x_1, x_2)$ mit $x_1 = \xi_1 e$, $x_2 = \xi_2 e$ eine solche Funktion, dann gilt entsprechend (13.2)

$$Q(x_1, x_2) = Q(\xi_1, \xi_2)\, e.$$

Von den Polynomen einer unabhängigen Veränderlichen ausgehend kann weiter auf solche Funktionen geschlossen werden, die sich auf einem Segment der reellen Veränderlichen ξ gleichmäßig durch Polynome approximieren lassen. Dies ist nach dem Weierstraßschen Approximationssatz beispielsweise der Fall bei Funktionen, die auf einem Segment stetig sind. Auch auf analytische Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen kann das Ergebnis vermöge der Potenzreihendarstellung dieser Funktionen ausgedehnt werden. Da diese Verfahren nur bei besonderen Klassen von Funktionen zum Ziel führen, sei von einer näheren Beschreibung derselben abgesehen.

Im folgenden wird ein Verfahren beschrieben, das für jede Funktion brauchbar ist. Es beruht darauf, daß jede Funktion als „Abbildung" aufgefaßt werden kann und benutzt die zwischen K und Ω bestehende Isomorphie. Das Verfahren möge zunächst für Funktionen von *einer* Veränderlichen beschrieben werden.

Es sei $x = \xi e$ das allgemeine Element von K. Da K isomorph zu Ω ist, gibt es eine umkehrbar eindeutige Abbildung von K auf Ω, nämlich

$$x = \xi e \to \xi.$$

Diese Abbildung sei dargestellt durch

$$\varphi(x) = \varphi(\xi e) = \xi. \tag{13.3}$$

Auf einer Teilmenge K' von K soll jetzt eine Funktion $F(x)$ definiert werden, so daß $F(x)$ wieder ein Element von K ist.

Zu diesem Zweck werden zunächst die durch die Abbildung φ in Ω erzeugten Bilder von K' bestimmt. Diese Bildmenge von K' sei $\Omega' \subset \Omega$. Ist $\eta = f(\xi)$ irgendeine auf Ω' definierte Funktion der Veränderlichen ξ, so wird durch $\eta = f(\xi)$ jeder Zahl $\xi \in \Omega'$ genau eine Zahl $\eta \in \Omega'' \subset \Omega$ zugeordnet, also die Menge Ω' in eindeutiger Weise auf die Menge $\Omega'' \subset \Omega$ abgebildet. Nunmehr werde jedem Element $\eta \in \Omega''$ vermöge der eindeutigen Abbildung $\varphi^{-1}(\eta) = y$ genau ein Element $y \in K'' \subset K$ zugeordnet. Dabei ist φ^{-1} die Umkehrung der durch (13.3) definierten Abbildung φ. Die soeben beschriebenen Abbildungen können mit Hilfe des folgenden Diagramms dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \Omega' \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ K'' & \xleftarrow{\quad\varphi^{-1}\quad} & \Omega'' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} K', K'' \subset K \\ \Omega', \Omega'' \subset \Omega \end{array}$$

Damit ist jedem Element $x \in K'$ genau ein Element $y \in K''$ zugeordnet, also auf K' eine eindeutige Funktion $y = F(x)$ definiert, so daß y selbst wieder Element von K ist. Es ist

$$F = \varphi^{-1} f \varphi . \tag{13.4}$$

Dies folgt aus

$$y = \varphi^{-1}(\eta) = \varphi^{-1} f(\xi) = \varphi^{-1} f \varphi(x).$$

Ist umgekehrt eine eindeutige durch die Funktion $y = F(x)$ erklärte Abbildung von K' auf K'' vorgegeben und sind Ω' und Ω'' die durch φ erzeugten Bildmengen von K' und K'', so ist vermöge $y = F(x)$ jedem Element von Ω' genau ein Element von Ω'' zugeordnet, also auf Ω' eine eindeutige Funktion $\eta = f(\xi)$ definiert. Für diese Funktion gilt

$$f = \varphi F \varphi^{-1},$$

denn es ist

$$\eta = \varphi(y) = \varphi F(x) = \varphi F \varphi^{-1}(\xi).$$

Es ist nach (13.1), (13.3) und (13.4)

$$F(x) = F(\xi e) = \varphi^{-1}\{ f(\varphi[\xi e])\} = \varphi^{-1}\{ f(\xi)\}.$$

Wegen der aus (13.3) folgenden Beziehung $\varphi^{-1}(\xi) = \xi e$ ergibt sich hieraus schließlich

$$F(\xi e) = f(\xi)\, e. \tag{13.5}$$

Wird auf Grund der zwischen K und Ω bestehenden Isomorphie das Element $x \in K$ mit der Zahl $\xi \in \Omega$ identifiziert, so ist das Element $y = F(x) \in K$ mit der Zahl $\eta = f(\xi) \in \Omega$ zu identifizieren, wie unmittelbar aus (13.5) folgt.

Die Bedeutung der Formel (13.5) möge an zwei Beispielen erläutert werden.

a) Wird z. B. die Basis e als „Radiant“ interpretiert, dann ist

$$\sin(\xi e) = (\sin \xi)\, e.$$

Streng genommen, müßte auf der linken Seite dieser Gleichung ein von „sin“ verschiedenes Symbol stehen, da es sich um die Funktion $\varphi^{-1}\{\sin(\varphi[\xi e])\}$ handelt. Für gewöhnlich benutzt man aber auf beiden Seiten dasselbe Symbol, ebenso wie man bei $\sin z$ (z komplex) dasselbe Symbol wie bei $\sin x$ (x reell) verwendet.

b) Das folgende Beispiel zeigt, daß bei der Anwendung von (13.5) nicht außer acht gelassen werden darf, daß diese Beziehung nur für Elemente von K gültig ist. Es seien $a_1 = \alpha_1 a_0$ und $a_2 = \alpha_2 a_0$ zwei V-Elemente des Vektorraumes A der Längen. Der Quotient dieser beiden Elemente ist

$$[a_1, a_2] = [\alpha_1 a_0, \alpha_2 a_0] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}[a_0, a_0] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e .$$

Der Logarithmus dieses Quotienten ist nach (13.5)

$$\log\,[a_1, a_2] = \log\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,e\right) = \log\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) e\,.$$

Dagegen kann man *nicht* schreiben

$$\log\,[a_1, a_2] = \log a_1 - \log a_2\,,$$

denn die auf der rechten Seite stehenden Logarithmen sind nicht erklärt, da $a_1, a_2 \in A$, aber A und K disjunkt sind.

Auch die Formel

$$\log\,(\xi e) = \log \xi + \log e$$

ist sinnlos, da $\log \xi \in \Omega$ ist, dagegen nach (13.5)

$$\log e = \log\,(1 \cdot e) = (\log 1)\, e = 0 \cdot e \in K,$$

und eine additive Verknüpfung zwischen Elementen von Ω und solchen von K nicht definiert ist.

Dagegen gilt das Multiplikationstheorem der Logarithmusfunktion für Elemente von K. Es ist nämlich nach (13.5)

$$\begin{aligned}\log\,((\xi_1 e)\,(\xi_2 e)) &= \log\,((\xi_1 \xi_2)\, e) = (\log\,(\xi_1 \xi_2))\, e \\ &= (\log \xi_1 + \log \xi_2)\, e = (\log \xi_1)\, e + (\log \xi_2)\, e.\end{aligned}$$

Im folgenden werden die für Funktionen von einer Veränderlichen gewonnenen Ergebnisse auf *Funktionen von mehreren Veränderlichen* ausgedehnt. Dabei genügt es, das Verfahren für Funktionen von *zwei* Veränderlichen zu beschreiben, da es sich ohne weiteres auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ausdehnen läßt.

Es wird zunächst die Menge $K \times K$, d. i. die Menge aller Paare von Elementen aus K betrachtet. Vermöge der durch (13.1) erklärten Abbildung φ von K auf Ω wird die Paarmenge $K \times K$ umkehrbar eindeutig auf die Paarmenge $\Omega \times \Omega$ abgebildet:

$$(x_1, x_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2).$$

Diese Abbildung sei dargestellt durch

$$\Phi\,(x_1, x_2) = (\xi_1, \xi_2). \tag{13.6}$$

Soll auf einer Teilmenge T von $K \times K$ eine Funktion von x_1, x_2 erklärt werden, so kann dies in entsprechender Weise geschehen, wie es oben für die Funktionen von einer Veränderlichen beschrieben wurde. Vermöge Φ wird T in eindeutiger Weise auf eine Teilmenge Θ von $\Omega \times \Omega$ abgebildet. Ist auf Θ eine beliebige Funktion $\eta = f(\xi_1, \xi_2)$ definiert, so wird durch diese Funktion Θ auf eine Teilmenge Ω'' von Ω abgebildet. Schließlich wird Ω'' durch φ^{-1} auf eine Teilmenge K'' von K abgebildet. Diese in drei Schritten erfolgende Abbildung von T auf K'' kann durch das folgende Diagramm veranschaulicht werden:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "F"] & \Theta \arrow[d, "f"'] \\ K'' & \Omega'' \arrow[l, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{ll} T \subset K \times K, & K'' \subset K \\ \Theta \subset \Omega \times \Omega, & \Omega'' \subset \Omega \end{array}$$

Damit ist jedem Elementepaar $(x_1, x_2) \in T$ genau ein Element $y \in K''$ zugeordnet, also auf T eine eindeutige Funktion $y = F(x_1, x_2)$ definiert. Es ist

$$F = \varphi^{-1} f \Phi, \tag{13.7}$$

denn

$$y = \varphi^{-1}(\eta) = \varphi^{-1} f(\xi_1, \xi_2) = \varphi^{-1} f \Phi(x_1, x_2).$$

Ist umgekehrt eine eindeutige Abbildung $y = F(x_1, x_2)$ von T auf K'' vorgegeben, und sind Θ bzw. Ω'' die Bilder von T bzw. K'', so wird durch $y = F(x_1, x_2)$ eine eindeutige Abbildung

$$\eta = \varphi(y) = \varphi F(x_1, x_2) = \varphi F \Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2)$$

von Θ auf Ω'' definiert, wobei $\Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2) = (x_1, x_2)$ die Umkehrung von (13.6) ist.

In entsprechender Weise wie bei den Funktionen von einer Veränderlichen ergibt sich

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= F(\xi_1 e, \xi_2 e) = \varphi^{-1}\{ f(\Phi[\xi_1 e, \xi_2 e])\} \\ &= \varphi^{-1}\{ f(\xi_1, \xi_2)\} = f(\xi_1, \xi_2)\, e, \end{aligned}$$

also die Formel

$$F(\xi_1 e, \xi_2 e) = f(\xi_1, \xi_2)\, e.$$

Die soeben gefundenen Ergebnisse können unmittelbar auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen übertragen werden. Es gilt also für $x_1, \ldots, x_\nu \in K$

$$F(x_1, \ldots, x_\nu) = F(\xi_1 e, \ldots, \xi_\nu e) = f(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)\, e.$$

§ 14. Das Π-Theorem

Die folgenden Betrachtungen dienen der Vorbereitung des Beweises für das Π-Theorem.

Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ ein freies System von eindimensionalen Vektorräumen. Die zu diesem System gehörende unendliche freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_0$ hat dann als allgemeines Element

$\prod_{\mu=1}^{\varrho} A_\mu^{\alpha_\mu}$, wobei die Exponenten α_μ ganze Zahlen sind. Ferner sei eine endliche Anzahl von V-Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ gegeben. Jedes dieser V-Elemente sei Element eines Vektorraumes, der zu $\mathfrak{G}_0$ gehört, etwa so, daß das V-Element x_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$ Element des Vektorraumes $\prod_{\mu=1}^{\varrho} A_\mu^{\alpha_{\mu\lambda}}$ ist.

Es wird nach Monomen

$$y = \prod_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda^{\sigma_\lambda}, \qquad \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \text{ ganze Zahlen}$$

gefragt, die Elemente von K sind.

Zu Monomen dieser Art gelangt man auf dem folgenden Weg. Es wird zunächst das Bild von x_λ im Modul Γ bestimmt. Dieses ist gegeben durch

$$\varphi(x_\lambda) = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\mu\lambda}\,\omega_\mu\,, \qquad \lambda = 1,\ldots,\nu, \qquad (14.1)$$

wobei die ω_μ die in § 10 angegebene Bedeutung haben, also eine Basis des Moduls Γ bilden. Die $\varphi(x_\lambda)$ selbst sind Elemente von Γ. Die in (14.1) auftretende Matrix hat ganzzahlige Elemente und ν Zeilen und ϱ Spalten. Ist $\nu > \varrho$, so ist ihr Rang $\varrho' \leqq \varrho$.

Das Bild des Monoms $y = \prod_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda^{\varrho_\lambda}$ in Γ ist

$$\varphi(y) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sigma_\lambda\,\varphi(x_\lambda).$$

Unter Benutzung von (14.1) ergibt sich

$$\varphi(y) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sigma_\lambda \left(\sum_{\mu=1}^{\varrho} \alpha_{\mu\lambda}\,\omega_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\left(\sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_{\mu\lambda}\,\sigma_\lambda\right)\omega_\mu\,.$$

Daraus folgt, daß y genau dann Element von K ist, wenn das in Γ gelegene Bild von y das Nullelement des Moduls Γ ist. Für Monome dieser Art gilt demnach

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_{\mu\lambda}\,\sigma_\lambda = 0\,, \qquad \mu = 1,\ldots,\varrho\,. \qquad (14.2)$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die ν Unbekannten σ_λ. Seine Matrix $(\alpha_{\mu\lambda})$ ist die Transponierte der Matrix des Systems (14.1).

Es sei $\varrho' \leqq \varrho < \nu$ der Rang der Matrix von (14.1), also auch der der Matrix von (14.2). Dann besitzt das Gleichungssystem (14.2) $\nu - \varrho'$ linear unabhängige Lösungen. Diese Lösungen sind ν-tupel von rationalen Zahlen, denn die Elemente der Matrix $(\alpha_{\mu\lambda})$ sind ganze Zahlen. Wird jedes der ν-tupel mit seinem Hauptnenner multipliziert, das so erhaltene ν-tupel von ganzen Zahlen sodann durch den größten gemeinsamen Teiler der Elemente des ν-tupels dividiert, so ergibt sich ein „minimales" ν-tupel von ganzen Zahlen, welches eine Lösung von (14.2) ist. Insgesamt gibt es $\nu - \varrho'$ linear unabhängige ganzzahlige Lösungen der soeben beschriebenen Art. Damit ist bewiesen der

Satz 1. Ist $\mathfrak{G}_0$ eine freie Abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $A_1,\ldots, A_\varrho$ und ist jedes der V-Elemente $x_1,\ldots, x_\nu$ $(\nu > \varrho)$ Element eines Vektorraumes, der zu $\mathfrak{G}_0$ gehört, dann gibt es $\nu - \varrho'$ unabhängige Monome

$$y_\varkappa = \prod_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda^{\sigma_{\lambda\varkappa}} \qquad \varkappa = 1,\ldots,\nu - \varrho'$$

die Elemente des Körpers K sind; ϱ' ist dabei der Rang der Matrix des Gleichungssystems (14.1).

Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt, daß sich von den Veränderlichen $y_1,\ldots, y_{\nu-\varrho'}$ beliebige Funktionen $F(y_1,\ldots, y_{\nu-\varrho'})$ bilden lassen, in der Weise, wie dies im vorangehenden Paragraphen beschrieben wurde, denn die Veränderlichen $y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}$ sind Elemente von K; $F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'})$ ist dann selbst auch ein Element von K. Wird in $F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'})$ jedes der $y_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, \nu - \varrho'$) durch das entsprechende Monom in den x_λ ersetzt, so ergibt sich eine Funktion der V-Elemente $x_1, \ldots, x_\nu$,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}), \tag{14.3}$$

die Element von K ist. Die damit auf der V-Menge erklärte Funktion ist keine beliebige Funktion der Argumente $x_1, \ldots, x_\nu$, sondern eine zusammengesetzte Funktion, die aus $F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'})$ durch Einsetzen entsteht.

Die auf diese Weise erzeugten Funktionen $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ seien *Funktionen der Klasse* (C) genannt. Die Funktionen dieser Klasse sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Elemente von K sind und aus einer beliebigen auf K definierten Funktion $F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}) \in K$ dadurch entstehen, daß für die Argumente $y_\varkappa$ dem Körper K angehörende Monome in den $x_1, \ldots, x_\nu$ eingesetzt werden.

Ist $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ eine gegebene Funktion der Klasse (C), dann gibt es nach Satz 1 zu den ν gegebenen Argumenten $x_1, \ldots, x_\nu$ genau $\nu - \varrho'$ dem Körper K angehörende Monome $y_\varkappa = \prod_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda^{\sigma_{\lambda\varkappa}}$. Da Φ der Klasse (C) angehört, ist $\Phi \in K$, und es existiert eine Funktion $F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}) \in K$, so daß (14.3) gilt. Damit ist das Π-Theorem bewiesen.

Satz 2 (Π-Theorem). $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$ sei eine Funktion der Klasse (C). *Dann ist $\Phi \in K$, und es gibt zu den Argumenten $x_1, \ldots, x_\nu$ genau $\nu - \varrho'$ dem Körper K angehörende unabhängige Monome $y_\varkappa = \prod_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda^{\sigma_{\lambda\varkappa}}$, so daß*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_\nu) = F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}).$$

Die diese Monome definierenden ν-tupel von Exponenten $(\sigma_{1\varkappa}, \ldots, \sigma_{\nu\varkappa})$ sind die $\nu - \varrho'$ linear unabhängigen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems (14.2) *von Satz 1; ϱ' ist der Rang der Matrix dieses Gleichungssystems.*

Bemerkung. Mit (C) ist eine ausgedehnte Klasse von Funktionen beschrieben, die auf der Menge der V-Elemente erklärt ist. Lassen sich auf dieser Menge noch andere Klassen von Funktionen erklären? Dazu ist zu bemerken, daß auf Grund der Axiome auf der V-Menge zwar Monome definiert sind, aber keine Polynome (d. h. Summen von Monomen), da die V-Elemente keinen Ring bilden (vgl. § 3). Man kann sogar zeigen, daß in der Menge der zu den Vektorräumen von $\mathfrak{G}_0$ gehörenden V-Elemente die Menge K die einzige Teilmenge ist, deren Elemente einen Ring bilden. Dies ist der Grund, weswegen von den auf der V-Menge erklärbaren Funktionen nur die der Klasse (C) in Betracht gezogen werden.

Von den Funktionen der Klasse (C) wird hauptsächlich in der Dimensionstheorie Gebrauch gemacht. Es sei $\psi(x_1, \ldots, x_\nu)$ eine Funktion, die Element irgendeines der zu $\mathfrak{G}_0$ gehörenden Vektorräume ist. Wird ψ durch eine Basis dieses Vektorraumes dividiert, so ergibt sich eine Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_\nu)$, die Element von K ist. Man kann sich daher bei der Betrachtung von Funktionen auf solche beschränken, die Elemente von K sind. Wird ferner von der Funktion Φ vorausgesetzt, daß sie der Klasse (C) angehört, dann folgt aus dem Π-Theorem

$$\Phi(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}).$$

Damit ist Φ auf eine Funktion F zurückgeführt, deren Argumente dem Körper K angehören. Da F selbst Element von K ist, gilt

$$\Phi(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv F(y_1, \ldots, y_{\nu-\varrho'}) = \gamma e, \tag{14.4}$$

wobei $\gamma \in \Omega$ und e das Einheitselement von K ist. *Jede physikalische Gleichung läßt sich in die Form* (14.4) *bringen, immer vorausgesetzt, daß Φ der Klasse* (C) *angehört.*

Schließlich sei noch bemerkt, daß auf Grund der zwischen K und Ω bestehenden Isomorphie aus (14.4) unmittelbar eine Gleichung zwischen Elementen von Ω abgelesen werden kann. In der Physik wird eine solche Gleichung „Zahlenwertgleichung" genannt.

Beispiel (vgl. auch *S. Drobot* [8]). Es sei x_1 die Länge eines Pendels, x_2 seine Masse, x_3 seine Schwingungsdauer, x_4 die Gravitationsbeschleunigung. Es wird eine zwischen diesen V-Elementen bestehende Beziehung gesucht. Die Zahl der gegebenen V-Elemente ist $\nu = 4$; bei Verwendung des CGS-Systems ist $\varrho = 3$ der Rang der unendlichen freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_0$. Wird angenommen, daß die Funktion Φ, welche die gesuchte Beziehung beschreibt, der Klasse (C) angehört, dann gilt gemäß (14.4)

$$\Phi(x_1, \ldots, x_4) \equiv F(y_1, \ldots, y_{4-\varrho'}) = \gamma e\,.$$

Zur Bestimmung der Argumente von F, also der Monome $y_\varkappa$, hat man zunächst das (14.1) entsprechende Gleichungssystem anzuschreiben,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= \omega_1 \quad , \\ \varphi(x_2) &= \quad \omega_2 \quad , \\ \varphi(x_3) &= \qquad \omega_3, \\ \varphi(x_4) &= \omega_1 \quad - 2\omega_3. \end{aligned} \tag{14.1'}$$

Seine Matrix hat den Rang $\varrho' = 3$. Das (14.2) entsprechende Gleichungssystem, aus welchem die Exponenten $\sigma_{\lambda\varkappa}$ der Monome $y_\varkappa$ zu bestimmen sind, hat als Matrix die Transponierte der Matrix des Systems (14.1'), daher

$$\begin{aligned} \sigma_1 \qquad + \sigma_4 &= 0, \\ \sigma_2 \qquad &= 0, \\ \sigma_3 - 2\sigma_4 &= 0. \end{aligned} \tag{14.2'}$$

Wegen $\nu = 4$, $\nu - \varrho' = 1$ hat (14.2') die ganzzahlige Lösung

$$\sigma_1 = -1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 2, \sigma_4 = 1.$$

Somit ist hier $y = x_1^{-1}\, x_2^0\, x_3^2\, x_4^1$ das einzige Monom, das Element von K ist. Damit folgt

$$\Phi(x_1, \ldots, x_4) \equiv F(x_1^{-1}\, x_3^2\, x_4) = \gamma e \qquad \text{oder } x_3^2 = \gamma' \frac{x_1}{x_4},$$

woraus abzulesen ist, daß das Quadrat der Schwingungsdauer unabhängig von der Masse, proportional der Pendellänge und umgekehrt proportional der Gravitationsbeschleunigung ist.

Zusammenfassung

Die vorstehend gegebene Darstellung des Größenkalküls will zeigen, wie die Begriffe und Methoden der modernen Algebra für die Beschreibung von Zusammenhängen nutzbar gemacht werden können, deren begriffliche Klärung für die Physik unerläßlich ist. Wie jeder Kalkül, so bedarf auch der Größenkalkül einer mathematischen Begründung, die hier durch die Beschreibung seiner algebraischen Struktur gegeben wird. Wenn auf die letztere das größere Gewicht gelegt und die Anwendung des Kalküls nur gestreift wurde, so war dabei der Gedanke maßgebend, eine feste Grundlage zu gewinnen, von welcher aus die Klärung der noch umstrittenen Fragen der Anwendung in Angriff genommen werden kann.

Literatur

[1] *Birkhoff, G.*, Hydrodynamics, Princeton University Press 1950.
[2] *Bridgeman, P. H.*, Dimensional Analysis, 2. Aufl., New York 1931.
[3] *Landolt, M.*, Größe, Maßzahl und Einheit, 2. Aufl., Zürich 1952.
[4] *Oberdorfer, G.*, Die Maßsysteme in Physik und Technik, Wien 1956.
[5] *Stille, U.*, Messen und Rechnen in der Physik, 1. Aufl., Braunschweig 1955.
[6] *Wallot, J.*, Größengleichungen, Einheiten, Dimensionen, 2. Aufl., Leipzig 1957.
[7] *Hölder, O.*, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Ber. Sächs. Akad., Leipzig **53** (1901), S. 1—64.
[8] *Drobot, S.*, On the Foundations of Dimensional Analysis, Studia Mathematica **14**, fasc. 1 (1953), S. 84—99.
[9] *Fleischmann, R.*, Struktur des Physikalischen Begriffssystems, Z. Phys. **129** (1951), S. 377—400.
[10] *Fleischmann, R.*, Das Physikalische Begriffssystem als mehrdimensionales Punktgitter, Z. Phys. **138** (1954), S. 301—308.
[11] *Fleischmann, R.*, Einheiteninvariante Größengleichungen, Dimensionen, Der Math. u. Naturw. Unterricht **12** (1959/60), S. 385—399, S. 443—458.
[12] *Bourbaki, N.*, Éléments de Mathématiques, Livre II, Algèbre, Kapitel I und II, 2. Aufl., Paris 1951/55.
[13] *Chatelet, A.*, Arithmétique et Algèbre modernes, Bd. 1, Paris 1954.
[14] *Dubreil, P.*, Algèbre, Bd. 1, 2. Aufl., Paris 1954.
[15] *Sperner, E.*, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, Bd. 1/2, 3./4. Aufl., Göttingen 1959.
[16] *Waerden, B. L. van der*, Algebra I, 3. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
[17] *Bourbaki, N.*, a. a. O., Kap. I, S. 79 ff. und Kap. II, S. 1 ff.
[18] *Landolt, M.*, a. a. O., S. 8.
[19] *Queysanne, M.* und *Delachet, A.*, L'Algèbre moderne, Paris 1955, S. 85.
[20] *Sperner, E.*, a. a. O., Bd. 2, S. 25/26.
[21] *Duschek, A.* und *Hochrainer, A.*, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Bd. 1, 4. Aufl., Wien 1960, S. 16/17.
[22] *Bourbaki, N.*, a. a. O., Kap. I, S. 24 ff.
[23] *Queysanne, M.* und *Delachet, A.*, a. a. O., S. 99 ff.
[24] *Dubreil, P.*, a. a. O., S. 224 ff.
[25] *Waerden, B. L. van der*, a. a. O., S. 54 ff.
[26] *Bourbaki, N.*, a. a. O., Kap. II, S. 107/108.
[27] *Fleischmann, R.*, vgl. [11], S. 449.
[28] *Chatelet, A.*, a. a. O., Bd. 1, S. 194 ff.